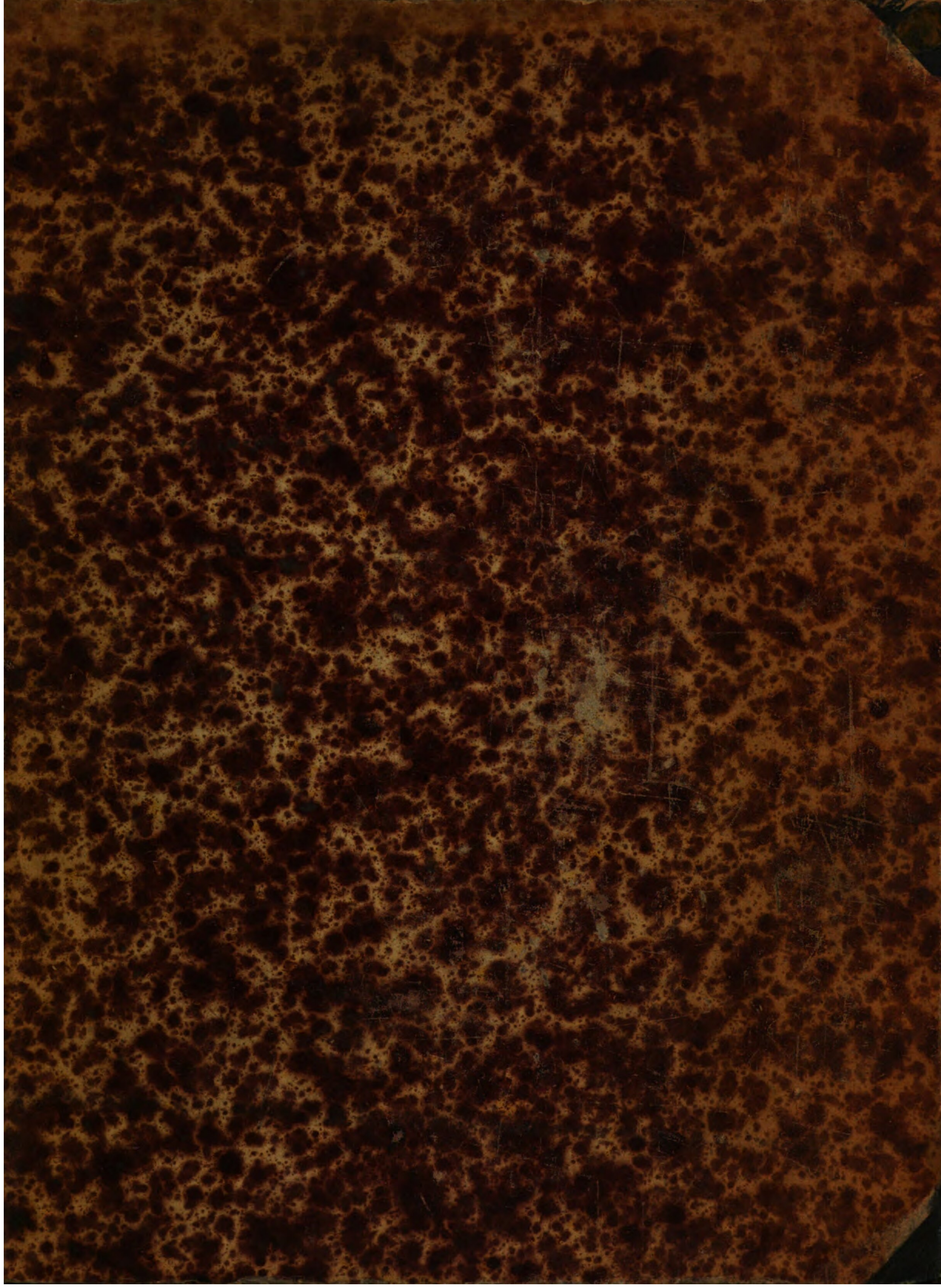




4^o Math. A.

204

Müller

DIE CONSTRUCTIVE
ZEICHNUNGS-LEHRE

ODER

DIE LEHRE VOM GRUND- UND AUFRISS,

DER

PARALLELPERSPECTIVE, DER MALERISCHEN PERSPECTIVE

UND DER

SCHATTEN-CONSTRUCTION.

FÜR

TECHNISCHE LEHRANSTALTEN UND FÜR DEN SELBSTUNTERRICHT

BEARBEITET

VON

Dr. JOH. MÜLLER,

Professor zu Freiburg im Breisgau.



ERSTER THEIL.



MIT EINEM ATLAS VON 35 KUPFERTAFELN.

ZWEITE AUFLAGE.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1874.

ANKÜNDIGUNG.

Das constructive Zeichnen ist für alle, Diejenigen von der höchsten Wichtigkeit, deren Lebensberuf in irgend einer Weise mit körperlicher Gestaltung oder mit Untersuchung von Körperformen zu thun hat. Unentbehrlich ist es für den Civil- und Militäringenieur, für den Architekten und den Mechaniker, unentbehrlich ist es für alle Handwerker, welche bei ihren Arbeiten der Werkzeichnungen bedürfen, also vorzugsweise für alle Bauhandwerker. Der Mineralog bedarf des constructiven Zeichnens zur richtigen Darstellung der Krystalle; für den Physiker und den Chemiker ist die Kenntniss desselben höchst wünschenswerth, denn ohne sie wird es ihm oft schwer fallen, sich über die Construction von Apparaten, deren er zur Ausführung seiner Versuche bedarf, genügend verständlich zu machen, oder aus Zeichnungen von Apparaten eine klare, lebendige Anschauung derselben zu gewinnen. Ja selbst der Künstler, welcher mit Formen zu thun hat, die nicht in die Kategorie mathematischer Körper fallen, muss mit den Regeln der Perspective vertraut sein, welche ihrerseits wieder ohne die Lehre vom Grund- und Aufriss nicht verständlich sind.

Diese für die Praxis so wichtige Disciplin wird in dem hier angekündigten Werke in einer dem Standpunkte und dem Lehrgang technischer Mittelschulen entsprechenden Weise vorgetragen. Der Verfasser war bemüht, die beiden Extreme zu vermeiden, in welche man beim Unterrichte des geometrischen Zeichnens so leicht verfällt, indem einerseits das Technische zur Hauptsache gemacht und das mathematische Verständniss der Raumverhältnisse vernachlässigt wird, während man andererseits das geometrische Zeichnen allzu theoretisch betreibt, und dasselbe wie einen Theil der reinen Mathematik behandelt. Die Grundsätze der Projectionslehre sind hier rationell entwickelt, ohne die mathematische Theorie weiter zu verfolgen, als es für den Zweck des constructiven Zeichnens nothwendig, und für eine allgemeinere Verständlichkeit zulässig ist.

Das ganze Werk zerfällt in vier Bücher, von welchen das erste die Lehre von der rechtwinkligen Projection oder vom Grund- und Aufriss enthält. Das zweite Buch behandelt die schiefwinkelige Projection oder die Parallelperspective, das dritte die conische Projection oder die malerische Perspective, das vierte endlich die Schattenconstruction.

Der grossen Bedeutung seines Inhaltes wegen, welcher die Grundlage für alle anderen Projectionsmethoden bildet, ist das erste Buch das umfangreichste, es bildet fast die Hälfte des ganzen Werkes.

Im zweiten Buche ist bei der für die Praxis so wichtigen Lehre von der Parallelperspective eine hier zum ersten Male ausführlicher besprochene und begründete Projectionsmethode in Anwendung gebracht worden, welche sich eben sowohl durch leichte Verständlichkeit, wie durch leichte Ausführbarkeit auszeichnet.

Obgleich die obengenannten vier Bücher ein zusammenhängendes und zusammengehöriges Ganzes bilden, so erschien es doch zur Erleichterung der Anschaffung zweckmässig, dasselbe in zwei Bände zu theilen, von denen jeder für sich allein verkaufbar ist. Der erste Band mit 35 Kupfertafeln enthält nur das erste Buch, während der zweite Band mit 37 Kupfertafeln die drei letzten Bücher enthält. Dadurch, dass die leitenden Grundsätze gehörig betont und klar entwickelt sind, ist es möglich gewesen, das Wesentliche der Projectionslehre auf verhältnissmässig kleinem Raum so darzustellen, dass Jeder, welcher das Werk gehörig durchgearbeitet hat, sich in allen vorkommenden Fällen orientiren kann und im Stande ist, zur Lösung aller in der Praxis vorkommenden Aufgaben, welche in das Gebiet des geometrischen Zeichnens gehören, den richtigen Weg einzuschlagen.

DIE CONSTRUCTIVE
ZEICHNUNGS-LEHRE.

ERSTER THEIL.

BRUNNEN

VERLAG UND DRUCK VON FRIEDRICH BRUNNEN, KARLSRUHE

1873

DIE CONSTITUTION

ZEICHNUNG-LEHRE

ERSTER THEIL

6
DIE CONSTRUCTIVE
ZEICHNUNGS-LEHRE

ODER

DIE LEHRE VOM GRUND- UND AUFRISS,

DER

PARALLELPERSPECTIVE, DER MALERISCHEN PERSPECTIVE

UND DER

SCHATTEN-CONSTRUCTION.

FÜR

TECHNISCHE LEHRANSTALTEN UND FÜR DEN SELBSTUNTERRICHT

BEARBEITET

VON

DR. JOH. MÜLLER,

Professor zu Freiburg im Breisgau.

ERSTER THEIL.

MIT EINEM ATLAS VON 35 KUPFERTAFELN.

ZWEITE AUFLAGE.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1874.



Die Herausgabe einer Uebersetzung in französischer und englischer Sprache,
sowie in anderen modernen Sprachen wird vorbehalten.

ERSTER THEIL

ZWEITE AUFLAGE

BRUNNENWEIG

1874

VORREDE.

Wie kommt ein Professor der Physik dazu, ein Buch über geometrisches Zeichnen zu schreiben? — wird vielleicht Mancher fragen, welchem das vorliegende Werk in die Hand kommt. Ich halte es deshalb für nothwendig, auf die Beantwortung dieser Frage von vornherein einzugehen, damit mir nicht, wie es in der That bei einer anderen Gelegenheit geschehen ist, zugerufen werde: Der Schuster solle bei seinem Leisten bleiben.

Schon in meinen Schuljahren habe ich das geometrische Zeichnen betrieben. Mein seliger Vater, Maler und Galleriedirector in Darmstadt, hatte mit grossem Eifer das Studium der mittelalterlichen Architektur betrieben, dessen bedeutendstes Resultat ein grösseres Werk über die St. Katharinenkirche zu Oppenheim war. Bei der Ausführung der grossen Tafeln dieses Werkes (theils geometrische Risse, theils perspectivische Ansichten) lernte er die hohe Bedeutung des constructiven Zeichnens würdigen, was ihn veranlasste, in den Unterrichtsstunden, welche er als Zeichnungslehrer am Gymnasium zu Darmstadt zu geben hatte, neben dem freien Handzeichnen mit einzelnen Schülern, welche Interesse dafür zeigten, auch das geometrische Zeichnen (über welches er auch ein kleines Schriftchen publicirt hatte) zu betreiben. Es geschah dies in einer Zeit, wo in Deutschland noch keine polytechnischen Schulen existirten, die Real- und Gewerbeschulen aber in ihrem ersten Entstehen waren, wo also das constructive Zeichnen fast nur auf Bauschulen und zwar meist in ganz mechanischer Weise

betrieben wurde. Mehrere seiner damaligen Schüler, welchen die Kenntniss des geometrischen Zeichnens für ihre künftige Lebensstellung von grossem Nutzen wurde, bewahrten ihm deshalb für diesen Unterricht stets eine dankbare Erinnerung.

Auf diese Weise schon frühzeitig mit constructivem Zeichnen beschäftigt, mit dessen wissenschaftlicher Grundlage ich durch das Studium der Mathematik noch mehr vertraut wurde, war ich denn auch wohl genügend vorbereitet, um den Unterricht der fraglichen Disciplin an der neu errichteten Realschule zu Giessen übernehmen zu können, als ich im Jahre 1837 zum Lehrer an dieser Anstalt ernannt wurde. Ich habe daselbst den Unterricht im geometrischen Zeichnen sieben Jahre lang, und zwar, wenn ich späteren Aeusserungen mehrerer meiner damaligen Schüler glauben darf, mit gutem Erfolg ertheilt.

Nachdem ich im Herbst 1844 als Professor der Physik an die Universität zu Freiburg berufen worden war, hörte ich zwar auf als Lehrer des geometrischen Zeichnens zu wirken, allein die Ausarbeitung meines Lehrbuches der Physik gab mir vielfach Veranlassung, dasselbe praktisch fort zu betreiben, und gerade der Umstand, dass ich die constructiven Zeichnungen zu diesem Werke fast ausschliesslich selbst ausgeführt habe, dass also Text und Figuren aus derselben Hand hervorgingen, dürfte wohl viel zu dem Erfolge dieses Werkes beigetragen haben.

Das Vorangehende glaubte ich mittheilen zu müssen, um zu zeigen, dass ich wenigstens nicht als ein Unberufener über das Thema des vorliegenden Werkes schreibe, dass ich nicht allein theoretisch mit demselben bekannt bin, sondern dass ich dasselbe auch praktisch geübt und gelehrt habe.

Die vorliegende constructive Zeichnungslehre hat zum Zweck, die Grundsätze der verschiedenen Projectionsmethoden zu entwickeln, nach welchen körperliche, geometrisch definirbare Gegenstände auf ebenen Flächen dargestellt werden können, und dieselben durch Anwendung auf geometrisch elementare Figuren und Körperformen zu erläutern und einzüben. Es ist also die Aufgabe dieses Werkes, von den einfachsten Fällen ausgehend, den Schüler mehr und mehr in das Verständniss räumlicher Verhältnisse einzuführen und ihn in den Stand zu setzen, nicht nur einfach geometrische Körperformen, sondern auch alle Gegenstände auf ebenen Flächen (dem Papier) richtig darzustellen, welche aus einfach geometrischen Körperformen zusammengesetzt sind, oder doch auf solche zurückgeführt werden können.

Der Gegenstand, welcher in dem vorliegenden Werke behandelt wird, ist

also für alle diejenigen von der höchsten Wichtigkeit, deren Lebensberuf in irgend einer Weise mit körperlicher Gestaltung oder mit der Untersuchung von Körperformen zu thun hat. Unentbehrlich ist das constructive Zeichnen für den Civil- und Militairingenieur, für den Architekten und den Mechaniker, unentbehrlich ist es für alle Handwerker, welche der Werkzeichnungen bei ihren Arbeiten bedürfen, also vorzugsweise für alle Bauhandwerker. Der Mineralog bedarf des constructiven Zeichnens zur richtigen Darstellung der Krystalle; für den Physiker und Chemiker ist die Kenntniss desselben höchst wünschenswerth, denn ohne sie wird es ihm oft schwer fallen, sich über die Construction von Apparaten, deren er zur Ausführung seiner Versuche bedarf, genügend verständlich zu machen, oder aus Zeichnungen von Apparaten eine klare, lebendige Anschauung derselben zu gewinnen. Ja selbst der Künstler, welcher mit Formen zu thun hat, die nicht in die Kategorie mathematischer Körper fallen, muss mit den Regeln der Perspective vertraut sein, welche ihrerseits wieder ohne die Lehre vom Grund- und Aufriss nicht verständlich sind.

Der Wichtigkeit des Gegenstandes entsprechend wird nun auch in der That an allen technischen Lehranstalten, also an polytechnischen Schulen, an Real- und Gewerbeschulen u. s. w. Unterricht im constructiven Zeichnen, und zwar je nach Zweck und Bedürfniss nach verschiedenen Methoden, auf eine dem Standpunkt der Anstalten bald mehr bald weniger entsprechende Weise ertheilt. — So viel ist aber gewiss, dass dieser Unterricht nur dann nutzbringend sein kann, wenn er auf rationelle Weise ertheilt wird, wenn er sich nicht, wie das früher wohl vielfach geschah, und wie es hier und da auch wohl heute noch geschieht, auf ein mechanisches Copiren von Vorlegeblättern und der von dem Lehrer an der Tafel ausgeführten Constructionen beschränkt. Ebenso wenig genügt es, wenn man die constructiven Zeichnungen zwar nach gewissen Regeln ausführen lässt, die Richtigkeit dieser Regeln aber nicht bewiesen und ihr Zusammenhang nicht erläutert wird. Nur dann, wenn der Schüler in das Verständniss der Grundsätze eingeführt wird, nach welchen constructive Zeichnungen auszuführen sind, nur dann, wenn er die Gründe der dabei in Anwendung kommenden Regeln einsieht, wird er im Stande sein, in allen vorkommenden Fällen sich zu orientiren und den rechten Weg zur Lösung seiner Aufgabe einzuschlagen.

Am vollständigsten werden die mathematischen Grundsätze, welche beim constructiven Zeichnen in Anwendung kommen, in der darstellenden Geometrie (*geometrie descriptive*) entwickelt. Die Aufgabe der darstellenden Geometrie fällt jedoch keineswegs mit der des constructiven Zeichnens zusammen, sie

geht vielmehr weit über die Bedürfnisse der letzteren hinaus. Es ist der Vorwurf der *geometrie descriptive*, die Grundlehren der analytischen Geometrie im Raum graphisch zu entwickeln und ihre Aufgaben graphisch zu lösen, während die constructive Zeichnungslehre die verschiedenen Projectionsmethoden zu entwickeln und auf ihre mathematischen Grundsätze zurückzuführen hat, durch welche ein richtiges Bild gegebener Körperformen dargestellt wird.

Die darstellende Geometrie ist also eine rein wissenschaftliche Disciplin, welche einen viel allgemeineren Standpunkt einnimmt, als die constructive Zeichnungslehre. Letztere kann als eine praktische Anwendung eines Theils der Grundsätze bezeichnet werden, welche in der *geometrie descriptive* entwickelt werden, sie nimmt also gegen die *geometrie descriptive* in wissenschaftlicher Beziehung eine untergeordnete Stellung ein, während sie in praktischer Beziehung eine um so höhere Bedeutung gewonnen hat.

Für die darstellende Geometrie ist die Zeichnung Mittel zum Zweck, während umgekehrt beim constructiven Zeichnen die mathematischen Grundsätze nur als Mittel zur geometrisch-richtigen Darstellung der Körperformen in Anwendung kommen.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass durch einen vollständigen Kursus der descriptiven Geometrie das volle Verständniss aller Grundsätze erlangt werden kann, welche bei Ausführung aller Arten constructiver Zeichnungen in Anwendung kommen; wenn aber das constructive (geometrische) Zeichnen nur durch den Unterricht in der *geometrie descriptive* erlernt werden könnte, so würde es Vielen unzugänglich bleiben, für welche doch seine Kenntniss zu den dringendsten Bedürfnissen gehört, weil der Unterricht in der *geometrie descriptive* eine grössere Summe mathematischer Vorkenntnisse voraussetzt, und weil er für das Verständniss weit schwieriger ist, als die wenigen Grundsätze, welche beim constructiven Zeichnen wirklich in Anwendung kommen. Während also für höhere technische Lehranstalten, wie z. B. für polytechnische Schulen, die *geometrie descriptive* zu den wichtigsten und unentbehrlichsten Unterrichtsgegenständen gehört, müsste die Einführung dieser Disciplin in elementarere Lehranstalten, wie Real- und Gewerbeschulen, nur als unzweckmässig bezeichnet werden, weil dadurch der Schüler zu dem, was er für das Leben bedarf, nur auf allzu grossen Umwegen gelangen würde, weil er, sich abmühend mit dem Verständniss theoretischer Sätze, die für seinen Standpunkt zu hoch sind, nicht die lebendige Anschauung und die praktische Uebung der einfacheren Fälle erlangt, die ihm in der Praxis vorkommen.

Wenn aber umgekehrt in Real- und Gewerbeschulen, welche sich ja zu den

polytechnischen Schulen ungefähr verhalten wie die Gymnasien zu der Universität, ein gründlicher Unterricht im constructiven Zeichnen (etwa in der Art und Ausdehnung unseres Werkes) ertheilt wird, so werden dadurch einerseits alle Schüler, welche alsbald in das praktische Leben eintreten, eine für ihre Bedürfnisse vollkommen ausreichende Kenntniss und Uebung desselben erlangt haben, während andererseits diejenigen, welche auf polytechnische Schulen übergehen, zu einem erfolgreicherem Studium der darstellenden Geometrie vorbereitet sind, weil sie, an eine richtige Anschauung räumlicher Verhältnisse gewöhnt, mit Leichtigkeit den Entwicklungen folgen können, welche dem Unvorbereiteten die grössten Schwierigkeiten bieten.

Die Literatur hat mehrere, zum Theil klassische Werke über darstellende Geometrie aufzuweisen, und dem entsprechend wird diese Disciplin] auch auf polytechnischen Schulen meist auf eine dem Zweck und dem Standpunkt dieser Anstalten vollkommen entsprechende Weise vertreten. Man kann dasselbe aber nicht in gleichem Maasse von dem Unterricht des constructiven Zeichnens auf technischen Mittelschulen behaupten. Während tüchtige Lehrer, welche ihre Aufgabe klar erkannt haben, auch hier den richtigen Weg verfolgen, sieht man anderwärts diesen Unterricht zwischen zwei Extremen schwanken, welche beide den Erfolg nur beeinträchtigen können. Einerseits verfallen nemlich Mathematiker, welchen dieser Unterricht an Real- und Gewerbeschulen übertragen ist, gar leicht in den Fehler, dass sie sich auf einen zu theoretischen Standpunkt stellen und den Unterricht mehr im Sinne der darstellenden Geometrie ertheilen, wobei sie leicht Gefahr laufen, theilweise unverständlich zu bleiben, während zugleich die technische Uebung hier allzu sehr in den Hintergrund tritt. Andererseits aber kommt es nicht selten vor, dass dem Lehrer des Freihandzeichnens auch der Unterricht im constructiven Zeichnen anvertraut wird, in welchem Falle dann meist die mathematische Begründung vernachlässigt, und die technische Ausführung der Zeichnungen zur Hauptsache gemacht wird.

Der geeignetste Vertreter der constructiven Zeichnungslehre an technischen Mittelschulen ist unter allen Umständen ein mathematisch gebildeter Lehrer, wenn er genug pädagogischen Takt besitzt, um sich innerhalb der dem Zweck dieser Anstalten und der Bildungsstufe der Schüler entsprechenden Gränzen zu halten, und wenn er selbst im Zeichnen hinlängliche Uebung hat, um auch in technischer Beziehung die Arbeiten der Schüler leiten zu können. — An solchen Anstalten aber, wo es die Verhältnisse bedingen, dass einem Künstler auch der Unterricht im constructiven Zeichnen übertragen wird, sollte wenigstens die For-

derung gestellt werden, dass derselbe hinlänglich mit den Elementen der Geometrie und Stereometrie vertraut sei (was einem gebildeten Manne gewiss nicht allzu schwer erreichbar ist), um den Schüler in das Verständniss der Regeln der Projectionslehre einführen zu können.

Zwischen den oben angedeuteten Extremen die richtige Mitte haltend, einen dem Bedürfniss und dem Standpunkt technischer Mittelschulen entsprechenden Leitfaden der constructiven Zeichnungslehre auszuarbeiten, war das Ziel, welches ich in dem vorliegenden Werke zu erreichen strebte. Während ich einerseits eine allzu grosse, leicht verwirrende Anhäufung von Material zu vermeiden suchte, war ich andererseits bemüht, die leitenden Grundsätze möglichst hervorzuheben und möglichst allgemein verständlich zu entwickeln. Durch diese Behandlungsweise dürfte die vorliegende constructive Zeichnungslehre auch besonders zum Selbststudium für solche geeignet sein, welche für ihre Lebensstellung des geometrischen Zeichnens bedürfen, welche aber aus der Schule entweder nur mangelhafte Kenntniss desselben mitgebracht haben, oder welche gar nicht das Glück hatten einen entsprechenden Unterricht in dieser wichtigen Disciplin zu geniessen.

Die vorliegende constructive Zeichnungslehre zerfällt in vier Bücher, von welchen das erste die Lehre von der rechtwinkligen Projection oder die Lehre vom Grund- und Aufriss behandelt, welche auch vorzugsweise mit dem Namen des geometrischen Zeichnens bezeichnet wird. Der Wichtigkeit dieser Lehre entsprechend, welche die Grundlage für alle anderen Projectionsmethoden, also auch für die Entwicklungen der drei letzten Abtheilungen dieses Werkes enthält, ist das erste Buch auch das umfangreichste, indem es fast die Hälfte des Ganzen ausmacht. In dem zweiten Buche wird die Lehre von der schiefwinkligen Projection oder der Parallelperspective, im dritten Buche aber die conische Projection oder die malerische Perspective behandelt. Das vierte Buch endlich enthält die Lehre von der Schattenconstruction.

Bei der Construction von Grund- und Aufriss kann überhaupt nur von einer einzigen Projectionsmethode die Rede sein; dasselbe gilt von der malerischen Perspective. Anders verhält es sich mit der Parallelperspective, von welcher das zweite Buch unserer constructiven Zeichnungslehre handelt, und welche überhaupt erst in neuerer Zeit allgemeiner angewendet wird. Parallelperspectivische Bilder können nemlich nach verschiedenen Projectionsmethoden dargestellt werden, nemlich durch die schiefwinkelige oder durch die axonometrische Projection, deren gegenseitiges Verhältniss in den letzten Para-

graphen des zweiten Buches näher besprochen wird. Ueber die axonometrische Projection sind bereits mehrere Werke erschienen, während die Grundsätze der schiefwinkligen Projection meines Wissens wenigstens in dem vorliegenden Werke zum ersten Male entwickelt werden.

Ich bin weit entfernt damit als Erfinder der schiefwinkligen Projection auftreten zu wollen, denn diese Darstellungsweise ist so einfach, dem Geübten und denkenden Zeichner so nahe liegend, dass sie thatsächlich schon lange in Anwendung gebracht worden ist, ehe man an ihre mathematische Begründung dachte. Eine zusammenhängende Darstellung dieser Projectionsmethode aber, welche leichter verständlich und leichter ausführbar ist als die axonometrische Projection, und eine Zurückführung derselben auf ihre mathematischen Principien, ist mir bis jetzt nicht bekannt geworden, ich glaube deshalb das Verdienst in Anspruch nehmen zu dürfen, durch dieses Werk zu einer allgemeineren Verbreitung dieser für die Praxis so wichtigen Zeichnungsmethode beigetragen zu haben.

Freiburg i. B., im Februar 1865.

Dr. J. Müller.

VORREDE ZUR ZWEITEN AUFLAGE.

Das constructive Zeichnen bildet ein in sich abgeschlossenes Feld, welches nicht wie Physik, physikalische Astronomie, Chemie u. s. w. täglich durch neue Entdeckungen bereichert wird. Bei Bearbeitung einer zweiten Auflage eines diesen Gegenstand behandelnden Werkes, tritt deshalb auch durchaus kein Bedürfniss nach wesentlichen Aenderungen hervor und es bedarf nur einiger formeller Correcturen im Text sowohl als auf den Tafeln.

Bei Abfassung dieses Werkes hatte ich vor Allem das Ziel im Auge, das so höchst wichtige constructive Zeichnen möglichst von den Schwierigkeiten zu befreien, welche seiner allgemeineren Anwendung entgegenstehen, und somit darf ich wohl hoffen, dass auch diese zweite Auflage ihren praktischen Nutzen stiften werde.

Freiburg i. B., im September 1873.

Dr. J. Müller.

INHALT DES ERSTEN THEILES.

Einleitung.

	Seite
§. 1. Frei-Handzeichnen und constructives Zeichnen	1
§. 2. Verschiedene Arten des constructiven Zeichnens	—
§. 3. Das Ziehen der Linien	2
§. 4. Ziehen gerader Linien in bestimmter Richtung	—
§. 5. Auftragen bestimmter Längen	4
§. 6. Das Tuschen	—

Erstes Buch.

Darstellung der Raumgrößen durch Grund- und Aufriss.

Erstes Capitel.

Grund- und Aufriss und die Beziehung derselben zu einander.

§. 7. Vertikal- und Horizontalprojection	9
§. 8. Grund- und Aufriss in einer Ebene	10
§. 9. Zusammengehörigkeit der Punkte des Grundrisses und des Aufrisses	—

Zweites Capitel.

Die gerade Linie.

§. 10. Grund- und Aufriss der geraden Linie	12
§. 11. Besondere Fälle	—
§. 12. Wenden des Grundrisses	13
§. 13. Wenden des Aufrisses	14
§. 14. Durchschnittspunkte der geraden Linie mit der Senkfläche und der Grundfläche	—
§. 15. Durchschneidung zweier gerader Linien	15

Drittes Capitel.

Ebene Flächen und begränzte ebene Figuren.

§. 16. Grund- und Aufriss ebener Figuren	16
§. 17. Besondere Fälle	17

	Seite
§. 18. Wenden des Grundrisses oder des Aufrisses	17
§. 19. Bestimmung der wahren Gestalt ebener Figuren	19
§. 20. Durchschnittslinien einer ebenen Fläche mit der Grund- und der Senkfläche	20
§. 21. Ermittlung der Grundschnitte einer durch drei gegebene Punkte gelegten Ebene	21
§. 22. Durchschnittslinie zweier Ebenen	22

Viertes Capitel.

Darstellung von Körpern, welche durch ebene Flächen begränzt sind.

§. 23. Langwürfel	22
§. 24. Gerade Ecksäulen	25
§. 25. Pyramiden	—
§. 26. Construction von Körpern, deren Netz gegeben ist	26
§. 27. Durchschneidung von Ebenen und ebenflächig begränzten Körpern	31
§. 28. Gegenseitige Durchdringung ebenflächig begränzter Körper	33
§. 29. Das Zeichnen von Krystallen	36

Fünftes Capitel.

Darstellung von Körpern, welche durch krumme Flächen begränzt sind.

§. 30. Cylinder, Kegel und Kugel	41
§. 31. Die Kegelschnitte	42
§. 32. Durchdringung des Kegels und des Cylinders mit ebenflächigen Körpern	44
§. 33. Gegenseitige Durchdringung krummflächiger Körper	49
§. 34. Die Schraubenlinie	50
§. 35. Scharfe und flache Schraubengewinde	51
§. 36. Schraubenflächen	53

EINLEITUNG.

Frei-Handzeichnen und constructives Zeichnen. Zeichnen überhaupt heisst 1
auf einer (meist ebenen) Fläche durch Linien einen körperlichen Gegenstand darstellen.

In der Regel ist die Fläche, auf welcher eine Zeichnung entworfen wird, die Bildfläche, ein Papierbogen, auf welchem die Linien mit Bleistift, Tusch, Kreide u. s. w. gezogen werden.

Man kann zwei Hauptarten des Zeichnens unterscheiden. Es werden nämlich 1) die Linien, welche einen bestimmten Gegenstand darstellen sollen, aus freier Hand nach dem Augenmaass gezogen, was vorzugsweise bei Darstellung solcher Gegenstände in Anwendung kommt, welche sich nicht als einfache geometrische Formen definiren lassen, wie z. B. Menschen- und Thiergestalten, Bäume, Blumen, Landschaften u. s. w. (freies Handzeichnen); oder es können 2) die Punkte, durch welche die zu ziehenden Linien bestimmt sind, durch geometrische Construction ermittelt werden, wie dies vorzugsweise bei Darstellung von einfachen geometrischen Körperformen, von Krystallen, von architektonischen Gegenständen, von verschiedenen Instrumenten und Geräthschaften u. s. w. geschieht (constructives Zeichnen).

Es versteht sich von selbst, dass in vielen Fällen beide Zeichnungsarten neben einander in Anwendung zu bringen sind, wie z. B. bei architektonischen Zeichnungen, bei welchen, wenn die geometrischen Hauptformen construirt sind, die freie Ornamentik, wie z. B. Laubwerk an Kapitälern und Gesimsen, aus freier Hand eingetragen wird.

Das vorliegende Werk beschäftigt sich nur mit den constructiven Zeichnungsarten.

Verschiedene Arten des constructiven Zeichnens. Zur constructiven Zeich- 2
nungslehre gehören folgende Hauptabtheilungen:

I. Die Darstellung eines Gegenstandes durch seine rechtwinkelige Projection auf eine horizontale und eine vertikale Ebene, oder wie man es gewöhnlich ausdrückt, durch Grund- und Aufriss. Diese Darstellungsweise wird vorzugsweise das geometrische Zeichnen genannt.

II. Darstellung eines Gegenstandes durch schiefwinkelige Projection auf einer meist vertikal angenommenen Ebene, die sogenannte Cavallierperspective.

III. Die Darstellung eines Gegenstandes auf einer gewöhnlich vertikal angenommenen Bildfläche durch conische Projection, die eigentliche oder malerische Perspective.

IV. Die Schattenconstructionen.

Diese vier Hauptzweige des constructiven Zeichnens werden in den vier Büchern des vorliegenden Werkes vorgetragen.

- 3 **Das Ziehen der Linien.** Beim Unterricht des geometrischen Zeichnens kommt es nicht allein darauf an, ein richtiges Verständniss zu vermitteln, sondern auch darauf, dass der Schüler eine hinlängliche technische Fertigkeit erlangt, seine Zeichnungen mit Präcision und Reinlichkeit auszuführen. Vor allen Dingen muss er stets bemüht sein, alle Linien rein und scharf zu ziehen. Ohne die grösste Schärfe und Genauigkeit der Linien tritt bei nur etwas complicirten Gegenständen alsbald eine Verwirrung ein, aus welcher man sich entweder gar nicht herauszufinden vermag, oder welche doch die auffallendsten Unrichtigkeiten zur Folge hat.

Da der geometrische Punkt eigentlich gar keine, die geometrische Linie aber nur eine Ausdehnung hat, nämlich die Länge, so ist klar, dass man in der Zeichnung Punkte und Linien möglichst fein machen müsse, um sich den geometrischen möglichst zu nähern. Jeder dicke Punkt, jede dicke Linie hat Ungenauigkeiten zur Folge. Sollte, um die Zeichnung mehr in die Augen fallend zu machen, die Verstärkung einzelner Linien nöthig sein, so darf dies erst geschehen, nachdem die Construction der Figur mit feinen und scharfen Linien vollständig und richtig ausgeführt worden ist, also jede Linie ihre richtige Stellung hat.

Wenn in den Figuren auf Tab. IV bis X die Punkte auffallend verstärkt sind, so ist dies nur geschehen, um bei Vergleichung der Figuren mit den entsprechenden Textstellen eine leichtere Uebersicht zu gewähren, aber durchaus nicht als Beispiel zur Nachahmung für den Schüler.

Ueberhaupt kann von einem Copiren der auf unseren Tafeln gegebenen Figuren keine Rede sein. Der Schüler hat alle Constructionen selbstständig und wo möglich in grösserem Maassstab auszuführen als der ist, welcher bei den Figuren der zu diesem Werke gehörigen Tafeln gewählt worden ist.

Gerade Linien werden am Lineal mit Bleistift vor- und mittelst der Reissfeder mit Tusch ausgezogen.

Kreise und Kreisbogen werden mittelst des Zirkels mit Bleistift- oder Reissfedereinsatz gezogen.

Um andere krumme Linien (Kurven) zu ziehen, muss man durch Construction eine Reihe von einzelnen, dieser Kurve angehörigen Punkten ermitteln und über diese dann die Linien aus freier Hand ziehen. In manchen Fällen lässt sich das Ziehen von Kurven durch das Curvenlineal erleichtern.

- 4 **Ziehen gerader Linien in bestimmter Richtung.** Vorzugsweise häufig kommen beim geometrischen Zeichnen wagerechte und senkrechte Linien vor. Wagerecht nennt man eine auf dem Papier gezogene Linie, wenn sie bei gehöriger Stellung des Blattes

für den Beschauer die Richtung von der Rechten zur Linken hat, wie die Zeilen eines gedruckten Buches. Eine auf dem Papier zu dieser Richtung rechtwinkelig gezogene Linie nennt man eine senkrechte.

Wenn das Papier, auf welchem eine Zeichnung ausgeführt werden soll, auf einem Reissbrett aufgespannt ist, so werden wagerechte und senkrechte Linien am leichtesten mit der Reisssschiene gezogen, welche in Fig. 1, Tab. I an der linken Seite des Reissbrettes anliegend dargestellt ist. Liegt das Brett so vor dem Zeichner, dass die Kante bc für denselben die Richtung von Links nach Rechts hat, so ist die Kante ab eine senkrechte, das Lineal fg der Reisssschiene hat aber wie auch die Kanten desselben bei der Fig. 1 dargestellten Lage eine wagerechte Richtung, wie man auch die Reisssschiene längs der Reissbrettkante ab verschieben mag. Jede längs einer Kante der Reisssschiene fg gezogene Linie wird also in diesem Fall eine wagerechte sein.

Um vertikale Linien zu ziehen, hat man die Reisssschiene an die horizontale Kante bc des Reissbrettes anzulegen, wie dies Fig. 2 angedeutet ist. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass die Kanten ab und bc wirklich genau rechtwinkelig zu einander sind.

Ist dies nicht der Fall, so wird man vertikale Linien am leichtesten dadurch erhalten, dass man auf die horizontal liegende Kante von fg der Reisssschiene einen hölzernen Winkelhaken aufsetzt, wie Fig. 3 zeigt, und dann längs der vertikalen Kante dieses Winkelhakens hinzieht.

Dieses Verfahren setzt aber die Richtigkeit des Winkelhakens voraus, d. h. es setzt voraus, dass der eine Winkel des Winkelhakens genau ein rechter sei. Will man sich auch von dem Winkelhaken unabhängig machen, so muss man, nachdem eine Horizontale gezogen ist, die Richtung der auf ihn rechtwinkelig stehenden Senkrechten durch Construction ermitteln.

Es sei z. B. AB , Fig. 4, eine Horizontale, auf welcher ein Perpendikel errichtet werden soll, so ziehe man um einen Punkt m der Horizontalen den Kreisbogen cd , um einen anderen Punkt n derselben mit derselben Zirkelöffnung den Kreisbogen fg . Diese beiden Kreisbogen schneiden sich in den Punkten r und s , und eine durch diese beiden Punkte gezogene Gerade steht rechtwinkelig auf AB .

Diese Construction ist immer anzuwenden, wo es auf möglichst grosse Genauigkeit ankommt.

Um mit einer gegebenen Linie eine andere parallel zu ziehen, wendet man zwei hölzerne Winkelhaken oder einen solchen Winkelhaken und ein Lineal an. Es sei z. B. ab , Fig. 5, eine gerade Linie, mit welcher eine andere parallel gezogen werden soll, so lege man an die gegebene Linie ab die eine Seite, etwa die Hypotenuse des Winkelhakens an; so dann lege man an eine zweite Seite des Winkelhakens ein Lineal (oder einen zweiten Winkelhaken) an und schiebe dann den Winkelhaken längs des Lineales fg fort. Bei diesem Verschieben bleiben alle Seiten des Winkelhakens ihrer ursprünglichen Lage parallel, wenn also der Winkelhaken etwa bis in die durch dunklere Schattirung ausgezeichnete Stelle geschoben worden ist, so ist die Hypotenuse cd desselben und also auch eine längs derselben gezogene Linie mit ab parallel.

In dem oben besprochenen Beispiel war die Hypotenuse des Winkelhakens an die gegebene Linie ab angelegt worden; man hätte statt dessen aber auch die eine Kathete des Winkelhakens an ab anlegen und dann weiter so verfahren können, wie es in Fig. 6 oder in Fig. 7 angedeutet ist.

Welche dieser drei Verfahrungsarten am zweckmässigsten ist, hängt von den Umständen ab.

Die eben besprochene Methode kann man auch in Anwendung bringen, um weitere horizontale und senkrechte Linien zu ziehen, wenn schon eine Horizontale und eine Senkrechte auf dem Papier gezogen sind.

Tab. I
Fig. 8.

- 5 **Auftragen bestimmter Längen.** Wenn die Aufgabe vorliegt, auf einer schon gezogenen Geraden eine gegebene Länge abzumessen, so wird diese Länge gewöhnlich auf einem Maassstab oder, wenn eine gegebene Figur copirt werden soll, auf dem gegebenen Original mit dem Zirkel abgegriffen und auf der zu fertigenden Zeichnung abgestochen. In vielen Fällen kann man aber die Vermittelung des Zirkels und die damit verbundenen oft störenden Zirkelstiche durch Anwendung von Maassstäbchen umgehen, deren Theilung auf einer zugeschärften Kante angebracht ist, wie Fig. 8 zeigt. Man legt die getheilte scharfe Kante des Maassstäbchens an die Linie an, auf welcher eine gegebene Länge abgemessen werden soll, und markirt mit Bleistift die Punkte, welche die verlangte Länge begränzen.

Man hat derartige Maassstäbchen, welche in Zoll und Linien, als auch solche, welche in Centimeter und Millimeter getheilt sind. Letztere sind der kleineren Unterabtheilungen wegen vorzuziehen. Die Länge dieser Maassstäbchen beträgt gewöhnlich gegen 18 Centimeter.

- 6 **Das Tuschen.** Will man die constructiven Zeichnungen durch Licht und Schatten besser hervorheben, so ist dazu das Anlegen mit Tusch das geeignetste Verfahren. Das Tuschen erfordert aber, wenn es auch nicht gerade als schwierig bezeichnet werden kann, doch immerhin einige Uebung, zu welcher sich schwerlich hinreichende Gelegenheit bieten würde, wenn man das Tuschen erst mit der Schattenlehre beginnen wollte.

Es scheint mir deshalb sehr zweckmässig, die Uebungen im Tuschen schon früher zu beginnen, und dazu bieten die Zeichnungen, welche der Schüler zur Einübung der im ersten und zweiten Buche vorgetragenen Lehren construirt hat, mannigfaltige Gelegenheit dar, denn man kann diese Figuren durch passende Schattirung hervorheben, ohne schon mit der Theorie der Schattenlehre bekannt zu sein.

In Beziehung auf die Technik des Tuschens hat man folgende Hauptregeln zu merken.

Die Pinsel, welche man zum Anlegen mit Tusch verwenden will, dürfen nicht zu klein sein; sie müssen eine genügende Menge Flüssigkeit fassen, um damit eine etwas grössere Fläche anlegen zu können, ohne jeden Augenblick frisch eintauchen zu müssen. Auch muss man es stets vermeiden mit fast trockenem Pinsel zu arbeiten.

Tab. II
Fig. 1.

Der Tusch, mit welchem man eine Fläche anlegen will, darf nur ganz hell angerieben sein, d. h. es muss wenig Tusch in einer verhältnissmässig grossen Quantität Wasser enthalten sein, so dass, wenn man damit eine Papierfläche überzieht, dieselbe nur einen ganz schwachen Ton erhält, etwa einen solchen, wie die obere Fläche der Fig. 1 auf Tab. II, und nicht so dunkel wie die schattirten Flächen der Figuren 23 bis 27 auf Tab. VIII.

Will man einzelne Flächen dunkler haben, wie z. B. solche dunklere Flächen in den Figuren 29, 30, 32 u. s. w. auf Tab. IX und Tab. X vorkommen, so muss man, nachdem der zuerst aufgetragene Tushton vollkommen trocken geworden ist, eine zweite schwache Tuschlage darüber ziehen; nach deren Auftrocknung eine dritte, eine vierte u. s. w., bis man die gewünschte Tiefe erreicht hat. Erst wenn man einen gewissen Grad von Dunkelheit

erreicht hat, darf man, um rascher zum Ziel zu kommen, mit dunkleren Tuschtönen fortarbeiten.

Zum Anlegen einzelner ebener Figuren bieten Grund- und Aufriss begränzter ebener Flächen, wie solche auf den Tafeln XIII bis XVII vorkommen, hinlänglich Gelegenheit. Wenn diese Flächen hier mit einem Schattenton versehen sind, so ist dies aus zweierlei Gründen geschehen, nämlich erstens, um sie besser hervorzuheben und die Figur übersichtlicher zu machen, und zweitens, um dadurch dem Schüler, wenn er die entsprechenden Figuren für sich construirt hat, Veranlassung zu geben, sich im Tuschen zu üben.

Fig. 1 auf Tab. II giebt ein Beispiel, wie man etwa einen durch ebene Flächen begränz- Tab. II
ten Körper zu tuschen hat. Diejenige Fläche, welche dem Licht am stärksten ausgesetzt, Fig. 1.
welche am hellsten erleuchtet ist, wie die Fläche 1 (links oben), kann man ganz weiss lassen. Alle übrigen werden dann einmal mit schwachem Tusch angelegt. Nachdem diese Lage vollständig trocken geworden ist, werden alle Flächen, mit Ausnahme von 1 und 2 (die oberste Fläche) nochmals überstrichen. Eine dritte Lage erhalten alle Flächen, mit Ausnahme von 1, 2 und 3 (die vordere Fläche) u. s. w. — Nachdem man 4 bis 5 Lagen aufgetragen hat, kann man den Tusch etwas verstärken, weil nun ein ferneres Ueberstreichen mit dem bis dahin gebrauchten hellen Tusch einen zu wenig merklichen Effect hat.

Wie oft eine gewisse Fläche mit Tusch überstrichen werden müsse, um den entsprechenden Ton zu erhalten, bleibt in jedem einzelnen Falle dem Urtheil des Zeichners überlassen. Stets aber muss man sich hüten, zu früh mit dunklen Tuschtönen zu operiren. Man muss aber, um eine reine und schöne Zeichnung zu erhalten, Geduld haben und die Mühe nicht scheuen, dieselbe Fläche mehrmals zu übertuschen. Wenn man zu früh dunkle Tuschtöne in Anwendung bringen wollte, so würde es schwer halten eine gehörige Gleichförmigkeit zu erzielen und störende Flecken zu vermeiden.

Besondere Sorgfalt erfordert das Schattiren von Cylindern und Kegeln. Es mögen hier einige darauf bezügliche empirische Regeln folgen, deren Zweck kein anderer ist als dem Schüler Gelegenheit zu geben, das Schattiren runder Formen technisch einzuüben.

Um einen Cylinder zu schattiren, theile man die ganze sichtbare Mantelfläche durch möglichst zarte Bleistiftlinien, welche mit der Axe des Cylinders parallel zu ziehen sind, in eine Anzahl, etwa wie es in Fig. 2, Tab. II geschehen ist, in mehrere, etwa in 14 gleich breite Tab. II
Streifen, die wir der Reihe nach mit *f, d, b, a, c, e, g, h, k, m, o, n, l* und *i* bezeichnen wollen. Fig. 2.

Während nun von der linken gezählt, etwa der vierte Streifen *a* ganz weiss bleibt, werden alle übrigen mit einem schwachen Tushton angelegt. Nachdem das Papier wieder vollkommen trocken geworden ist, werden alle Streifen, mit Ausnahme von *a, b* und *c* mit einer zweiten der ersten gleichen Tuschlage überfahren; dann mit einer dritten Lage alle Streifen, mit Ausnahme von *a, b, c, d* und *e* u. s. w. Kurz es kommen 1 Tuschlage auf *b* und *c*, 2 auf *d* und *e*, 3 auf *f* und *g*, 4 auf *h* und *i*, 5 auf *k* und *l*, 6 auf *m* und *n* und 7 endlich auf *o*.

Nachdem man die beiden ersten Tuschlagen aufgetragen hat, kann man den Tusch ein wenig dunkler anreiben und für die folgenden Lagen diesen etwas verstärkten Tushton anwenden.

Auf diese Weise erhält man eine Schattirung, bei welcher der Ton eines jeden Streifens scharf gegen den der benachbarten abgegränzt ist; allein die Differenzen von einem zum andern sind doch, wenn man nicht zu dunklen Tusch angewandt hat, so gering, dass sie auf

einige Entfernung schon verschwinden und dass die Rundung des Cylinders schon deutlich hervortritt.

Im Anfang wird es gut sein, wenn sich der Schüler genau an diese Angaben hält. Später, wenn er mehr Uebung erlangt hat, wird es ihm nicht schwer halten, die Gränze zwischen je zwei aneinanderstossenden Streifen so zu verwischen, dass der Uebergang von Licht zum Schatten ein ganz allmäliger wird. Stets muss aber darauf gesehen werden, dass auf der nämlichen Vertikallinie von Oben bis Unten der gleiche Ton herrscht.

Sollte die Schattirung auf die angegebene Weise noch nicht kräftig genug sein, so kann man mit etwas dunkleren Tönen von dem linken Rande gegen den Lichtstreifen *a* hin, von der dunkelsten Stelle *o* aber nach beiden Seiten hin vorgehen und zwar in der Weise, dass man jedesmal nach dem Auftragen eines dunkleren Tones denselben gegen die helleren Nachbarstreifen hin verwischt.

Zum Einüben des Schattirens von Cylindern bieten die Aufgaben späterer Capitel mannigfaltige Gelegenheit dar. Hat der Schüler einmal etwas mehr Uebung, einen gewissen Takt im Abschattiren von Cylindern erlangt, so ist es, namentlich wenn es sich um Cylinder von geringerem Durchmesser handelt, gar nicht mehr nöthig, durch feine Bleistiftlinien den Cylindermantel in eine Reihe paralleler Streifen zu theilen, man wird die Tuschlagen auch ohne diese Richtungslinien aufzutragen im Stande sein.

Tab. II
Fig. 3 u.
Fig. 4.

Nach diesen Erläuterungen wird wohl auch das Schattiren von ganzen und abgestumpften Kegeln verständlich sein, wofür Fig. 3 und 4, Tab. II als Beispiel dienen können und für dessen Einübung sich im Folgenden mannigfache Gelegenheit bieten wird.

ERSTES BUCH.

DARSTELLUNG DER RAUMGRÖSSEN
DURCH GRUND- UND AUFRISS.

THE END

THE END OF THE WORLD

THE END OF THE WORLD

Erstes Capitel.

Grund- und Aufriss und die Beziehung derselben zu einander.

Vertikal- und Horizontalprojection. Denken wir uns hinter irgend einem Körper, 7 etwa hinter der vierseitigen Pyramide $abcdf$, Fig. 1, Tab. III eine vertikale Ebene $RSTV$ Tab. III und unter demselben eine horizontale Ebene $OPRV$ angebracht, denken wir uns ferner Fig. 1. von jedem Punkt des Körpers Perpendikel auf jede dieser beiden Ebenen gefällt, so bilden die Fusspunkte der auf die vertikale Fläche gefällten Perpendikel die Vertikalprojection oder den Aufriss des Körpers, während die Fusspunkte der auf die horizontale Ebene gefällten Perpendikel die Horizontalprojection oder den Grundriss des Körpers bilden.

Die vertikale Fläche $RSTV$ wird die Senkfläche, die horizontale Ebene $OPRV$ wird die Grundfläche genannt.

Die Linie VR , in welcher Grund- und Senkfläche sich schneiden, heisst die Grundlinie.

Nach der obigen Definition ist a' die Vertikalprojection oder der Aufriss des Gipfelpunktes a , eben so wie b' die Vertikalprojection oder der Aufriss des Punktes b ist. Ferner ist die Linie $a'b'$ der Aufriss der Linie ab , ebenso wie $d'b'$ und $a'd'$ die Aufrisse der Kanten db und ad sind.

Das Dreieck $a'd'b'$ ist die Vertikalprojection oder der Aufriss der Seitenfläche adb der Pyramide; $a'd'c'$ ist der Aufriss von adc u. s. w.

Da c'', d'', b'' und f'' die Horizontalprojectionen oder die Grundrisse der vier Eckpunkte $cdbf$ der Pyramidenbasis sind, so ist auch $c''d''$ der Grundriss der Kante cd ; $d''b''$ ist der Grundriss der Kante db u. s. w., endlich ist $c''d''b''f''$ der Grundriss der Basis $cdbf$ der Pyramide.

Der Punkt a'' der Grundfläche ist der Grundriss des Pyramidengipfels a und demnach sind $d''a''b''$, $b''a''f''$, $f''a''c''$ und $c''a''d''$ die Grundrisse der vier Seitenflächen dab , baf , fac und cad der Pyramide.

Aus dem Aufriss eines Körpers ersieht man seine Ausdehnung von der Linken zur Rechten und von Unten nach Oben, während der Grundriss seine Dimensionen von der Linken zur Rechten und diejenigen von Vorn nach Hinten darstellt. Demnach kann man

einen Körper weder aus dem Grundriss allein, noch aus dem Aufriss allein vollständig kennen lernen. Erst durch die Combination von Grundriss und Aufriss erlangt man eine vollständige Kenntniss des Körpers.

8 **Grund- und Aufriss in einer Ebene.** Nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition machen Grundfläche und Senkfläche, wenn sie in ihrer wahren gegenseitigen Stellung sich befinden, einen rechten Winkel mit einander. In der Regel werden aber Grund- und Aufriss eines Gegenstandes auf eine und dieselbe Papierfläche gezeichnet, so dass sie in der nämlichen Ebene liegen.

Tab. III
Fig. 1.

Aus ihrer wahren gegenseitigen Lage können aber Grund- und Aufriss leicht dadurch in eine Ebene gebracht werden, dass man die Grundfläche $OPRV$, Fig. 1 mit dem auf ihr entworfenen Grundriss um die Grundlinie VR als Axe so weit dreht, bis sie mit der Senkfläche $VRST$ in eine Ebene fällt, bis also die Grundfläche in die Lage $VR O' P'$ kommt.

Um die Grundfläche aus der Lage $VRPO$ in die Lage $VRP' O'$ zu bringen, ist eine Drehung von 90° nöthig.

Tab. III
Fig. 2.

Um das eben Vorgetragene dem Schüler noch anschaulicher zu machen, kann man ein Modell zu Hülfe nehmen, wie ein solches in Fig. 2 dargestellt ist. Zwei, wie eine Schultafel schwarz angestrichene Bretter, von denen jedes ungefähr $1\frac{1}{2}$ bis zwei Fuss hoch und breit ist, sind durch Charniere mit einander verbunden, so dass man sie nach Belieben rechtwinklig zu einander stellen oder sie in eine Ebene legen kann.

Hat man das eine Brett horizontal, das andere vertikal gestellt, wie Fig. 2 andeutet, so kann man irgend einen einfachen Körper zwischen den Brettern aufstellen und von ihm mit Kreide nach der in Fig. 1 angedeuteten Weise Grund- und Aufriss zeichnen. Ist dies geschehen, so wird der Körper entfernt und durch eine Drehung von 90° die Grundfläche in eine vertikale Lage oder auch die Senkfläche durch Umlappen in die Ebene der Grundfläche gebracht. Nun liegen Grund- und Aufriss in der That in einer Ebene, während Grund- und Senkfläche durch die Grundlinie getrennt erscheinen.

Tab. III
Fig. 3.

Will man auf einer Papierfläche, z. B. auf einem halben Bogen Schreibpapier, welcher für einfachere Figuren gross genug ist, einen Körper durch Grund- und Aufriss darstellen, so wird zunächst das Papier seiner Länge nach durch eine horizontale Linie VR , Fig. 3 in zwei Hälften getheilt, deren obere für den Aufriss bestimmt ist, während die untere den Grundriss aufnehmen soll.

Nachdem die Horizontale gezogen ist, muss man sodann vor allen Dingen die Richtung der Senkrechten, und zwar, wenn es auf Genauigkeit ankommt, nach der in §. 4 angegebenen Methode durch Construction mit dem Zirkel bestimmen.

Die Horizontale VR , welche Grund- und Aufriss trennt, führt, wie bereits angeführt wurde, den Namen der Grundlinie.

Hat man auf einem Papierblatt Grund- und Aufriss eines Körpers aufgetragen, so kann man sie leicht in ihre richtige gegenseitige Lage bringen, wenn man das Papier in der Richtung der Grundlinie bricht und dann die obere, den Aufriss enthaltende Hälfte vertikal aufstellt, während die untere Hälfte mit dem Aufriss horizontal liegen bleibt.

9
Tab. IV
Fig. 5.

Zusammengehörigkeit der Punkte des Grundrisses und des Aufrisses. In Fig. 5, Tab. IV sei a irgend ein zwischen der vertikalstehenden Senkfläche und der horizon-

talgestellten Grundfläche liegender Punkt, dessen Grundriss a'' und dessen Aufriss a' ist. Denkt man sich nun durch die projicirenden Perpendikel aa' und aa'' eine Ebene gelegt, so steht dieselbe offenbar rechtwinkelig auf der Senkfläche und auf der Grundfläche, folglich auch rechtwinkelig auf der Durchschnittslinie der Senkfläche und der Grundfläche oder mit andern Worten: die Grundlinie VR steht rechtwinkelig auf der durch die Perpendikel aa' und aa'' gelegten Ebene.

Die durch aa' und aa'' gelegte Ebene schneidet die Senkfläche in der Linie $a'n$, die Grundfläche aber in der Linie $a''n$. Diese beiden Linien $a'n$ und $a''n$ stehen rechtwinkelig auf der Grundlinie VR .

Denken wir uns nun die Grundfläche $VRPO$ um VR als Axe gedreht, so bleibt bei dieser Drehung $a''n$ stets rechtwinkelig auf VR , und wenn die Grundfläche in die vertikale Lage $VRP'O'$, wenn also der Punkt a'' an die Stelle a''' gekommen ist, so bildet nun na''' die geradlinige Fortsetzung von $a'n$ oder mit andern Worten $a'a'''$ ist eine auf der Grundlinie VR rechtwinkelig stehende Linie.

Es ist aber a' der Aufriss, a''' der Grundriss desselben Punktes. Wenn also Grund- und Aufriss in eine Ebene gelegt sind, so muss die gerade Linie, welche Grund- und Aufriss desselben Punktes verbindet, rechtwinkelig auf der Grundlinie stehen; oder Grund- und Aufriss eines bestimmten Punktes müssen auf einer und derselben zur Grundlinie rechtwinkelligen Linie liegen; oder endlich, wie man es gewöhnlich ausdrückt: wenn Grund- und Aufriss eines Gegenstandes in einer Ebene gezeichnet sind, so müssen die Punkte des Grundrisses senkrecht unter den entsprechenden Punkten des Aufrisses liegen.

In Fig. 6 stelle ab eine gerade Linie im Raume dar. Wird durch dieselbe eine Ebene Tab. IV rechtwinkelig zur Senkfläche gelegt, so schneidet sie dieselbe in der geraden Linie $a'b'$. Fig. 6. Diese gerade Linie $a'b'$ ist die Vertikalprojection oder der Aufriss der Linie ab . Jeder Punkt der Linie ab hat seinen Aufriss auf $a'b'$. a' ist der Aufriss des einen, b' ist der Aufriss des andern Endpunktes der Geraden ab . Liegt der Punkt c auf der Geraden ab , so muss auch sein Aufriss c' auf der Geraden $a'b'$ liegen.

In gleicher Weise ist die Gerade $a''b''$ die Horizontalprojection oder der Grundriss der geraden Linie ab . Liegt der Punkt c auf der Geraden ab , so muss sein Grundriss c'' auf der Geraden $a''b''$ liegen.

Wird nun die Grundfläche aus ihrer wahren Lage $VRPO$ umgelegt, so dass sie in die Ebene der Senkfläche zu liegen kommt, so gelangt der Punkt a'' nach a''' , c'' nach c''' und b'' nach b''' . Nach obiger Auseinandersetzung aber müssen nun die Linien $b'b'''$, $c'c'''$ und $a'a'''$ rechtwinkelig auf der Grundlinie VR stehen oder mit andern Worten der Grundriss b''' des Punktes b liegt senkrecht unter dem Aufriss b' desselben Punktes, a''' liegt senkrecht unter a' und c''' liegt senkrecht unter c' .

In Fig. 7 stelle acb irgend eine krumme Linie im Raume dar, deren Vertikalprojection Tab. IV $b'e'b'$ ist, während $a''c''b''$ die Projection der Curve acb auf die in ihrer wahren Lage Fig. 7. befindliche Grundfläche ist. Wird nun die Grundfläche um VR abwärts gedreht bis sie auch vertical steht, so kommt der Grundriss des Punktes a senkrecht unter a' , der Grundriss des

Punktes c senkrecht unter seinen Aufriss c' , der Grundriss des Punktes b senkrecht unter seinen Aufriss b' zu liegen.

Tab. IV
Fig. 8.

Soll $a'b'c'$ Fig. 8 der Aufriss und $a'''b'''c'''$ der in dieselbe Ebene mit dem Aufriss gelegte Grundriss eines Dreiecks abc sein, so muss a''' senkrecht unter a' , b''' senkrecht unter b' und c''' senkrecht unter c' liegen.

Um die Zusammengehörigkeit eines Punktes im Aufriss mit einem Punkte im Grundriss besser hervorzuheben, werden sie häufig durch eine punktierte Linie verbunden, wie dies z. B. in mehreren Figuren der Tab. V, Tab. VI u. s. w. der Fall ist.

Zweites Capitel.

Die gerade Linie.

10 **Grund- und Aufriss der geraden Linie.** Die gerade Linie erscheint im Grundriss sowohl als im Aufriss ebenfalls als gerade Linie (in speciellen Fällen als Punkt, d. h. als eine gerade Linie, deren Länge gleich Null ist); so z. B. Fig. 1 auf Tab. V. — Aus dem Aufriss Fig. 1 ersehen wir z. B., dass der Punkt a höher liegt als b ; ob aber der Punkt a weiter vor oder weiter zurück liegt als b , können wir aus dem Aufriss allein nicht erkennen. Erst aus dem Grundriss Fig. 1 ersehen wir, dass und wieviel a weiter vorliegt.

Tab. V
Fig. 1.

Der Aufriss der Fig. 2 ist dem der Fig. 1 völlig gleich; der Grundriss der Fig. 2 zeigt uns aber, dass hier a weiter zurück liegt als b .

Tab. V
Fig. 2.

11 **Besondere Fälle.** Als besondere Fälle der Lage der geraden Linie haben wir folgende zu bemerken.

a) Eine gerade Linie, welche rechtwinkelig auf der Grundfläche steht (also eine senkrechte Linie), erscheint im Aufriss rechtwinkelig zur Grundlinie Fig. 3, im Grundriss aber zum Punkt verkürzt, d. h. der Grundriss des einen Endpunktes a und der Grundriss des anderen Endpunktes b fallen in einem und demselben Punkte zusammen.

Tab. V
Fig. 3.

In dem Falle, dass im Grundriss, wie hier, zwei Punkte in einen zusammenfallen, soll in Zukunft der Buchstaben des oberen stets vorangestellt werden.

b) Wenn eine gerade Linie rechtwinkelig zur Senkfläche steht, so muss sie im Grundriss rechtwinkelig auf der Grundlinie stehend erscheinen, wie die Linie ab Fig. 4; im Aufriss aber erscheint eine solche Linie zum Punkt verkürzt.

Tab. V
Fig. 4.

In dem Falle, dass, wie hier, im Aufriss zwei Punkte in einen zusammenfallen, soll im Folgenden stets der Buchstaben des vordern (im Grundriss am weitesten von der Grundlinie abstehenden) vorangestellt werden.

c) Eine gerade Linie, welche parallel mit der Grundfläche läuft, muss im Aufriss als horizontale Linie erscheinen, wie ab Fig. 5, da ja alle ihre Punkte in gleicher Höhe über der Grundfläche liegen, also gleich hoch über der Grundlinie erscheinen müssen. Im Grundriss erscheint eine solche Linie in ihrer wahren Länge, also unverkürzt. Tab. V
Fig. 5.

d) Eine gerade Linie, welche mit der Senkfläche parallel läuft, erscheint im Grundriss als eine mit der Grundlinie parallele Linie, wie ab Fig. 6. Im Aufriss erscheint eine solche Linie in ihrer wahren Länge. Tab. V
Fig. 6.

e) Eine gerade Linie, welche mit der Senkfläche und mit der Grundfläche parallel läuft, erscheint im Grundriss sowohl wie im Aufriss als eine mit der Grundlinie parallel laufende Linie, wie ab Fig. 7. Tab. V
Fig. 7.

Wenden des Grundrisses. Wenn ein Gegenstand um eine vertikale (rechtwinkelig auf der Grundfläche stehende) Axe gedreht wird, so behalten alle Punkte desselben unverändert ihre ursprüngliche Höhe, während die Gestalt seines Grundrisses völlig unverändert bleibt; nur die Stellung des Grundrisses zur Grundlinie wird durch eine solche Drehung geändert. 12

Denken wir uns z. B. die Linie ab Fig. 8, Tab. VI um eine durch den Punkt b gehende vertikale Axe gedreht, so behält b seine Lage unverändert bei, der Punkt a dagegen beschreibt einen Kreisbogen, welcher im Grundriss unverkürzt, im Aufriss aber zur Linie verkürzt erscheint. Tab. VI
Fig. 8.

Ist die Drehung des Grundrisses so weit fortgesetzt worden, dass der Punkt a nach a' gekommen ist, so findet man die zugehörige Lage des Punktes a' im Aufriss, wenn man von a des alten Aufrisses horizontal herüber und von a' des gewendeten Grundrisses vertikal in die Höhe zieht (denn einerseits ist ja durch die fragliche Wendung die Höhe des Punktes a nicht geändert worden, andererseits muss jeder Punkt im Aufriss vertikal über seinem Grundriss stehen).

Wir haben hier den ursprünglichen Grund- und Aufriss ab , wie auch den gewendeten $a'b$ in einer und derselben Figur zusammengestellt. Man hätte aber den gewendeten Grundriss sammt dem entsprechenden Aufriss auch ganz getrennt von dem ursprünglichen zeichnen können, wie dies namentlich bei complicirteren Gegenständen nothwendig ist. Im Grundriss Fig. 9 ist die Linie $b'a'$ für sich allein in der Lage gezeichnet, welche sie nach der Wendung in Fig. 8 einnimmt und der zugehörige Aufriss dadurch gefunden, dass man von jedem Punkt des neuen Grundrisses vertikal in die Höhe und von dem entsprechenden Punkte des alten Aufrisses horizontal herüber gezogen hat. Da, wo eine solche Vertikale von der zugehörigen Horizontalen geschnitten wird, ist der gesuchte Punkt des neuen Aufrisses. Tab. VI
Fig. 9.

Man kann dieses Wenden des Grundrisses benutzen, um die wahre Länge einer geraden Linie zu finden, welche ursprünglich sowohl im Grundriss als auch im Aufriss verkürzt erschien, wie die Linie ab Fig. 10. Man wende zu diesem Zweck die Linie ba im Grundriss bis ba' , so dass sie mit der Grundlinie parallel ist, und suche zu dem so gewendeten Grundriss den entsprechenden Aufriss, so zeigt der neue Aufriss ba' die wahre Länge der Linie (nach §. 11, d.). Tab. VI
Fig. 10.

- 13 **Wenden des Aufrisses.** Wenn ein Gegenstand um eine Axe gedreht wird, welche rechtwinkelig auf der Senkfläche steht, so bleibt dabei der Abstand aller Punkte von der Senkfläche ungeändert. Bei einer solchen Drehung ändert sich zwar die Lage des Aufrisses gegen die Grundlinie, im übrigen bleibt jedoch die Gestalt des Aufrisses ungeändert.

Tab. VI
Fig. 11. Wenden wir diesen allgemeinen Satz auf die in Fig. 11 im Grund- und Aufriss dargestellte gerade Linie ab an! Denken wir uns diese Linie um eine Axe gedreht, welche durch den Punkt b gehend rechtwinkelig auf der Senkfläche steht, so beschreibt dabei der Punkt a einen Kreisbogen, welcher im Aufriss unverkürzt, im Grundriss aber zur geraden Linie verkürzt erscheint. Ist bei dieser Drehung des Aufrisses der Punkt a nach a' , a'' , a''' gekommen, so findet man die entsprechende Lage dieser Punkte im Grundriss, wenn man von a' , a'' , a''' des gewendeten Aufrisses vertikal herunter und durch a des alten Grundrisses eine Linie parallel mit der Grundlinie zieht. Da, wo diese Horizontale von den erwähnten Vertikalen geschnitten wird, sind die Punkte a' , a'' und a''' des neuen Grundrisses.

Wendet man den Aufriss einer geraden Linie, bis derselbe mit der Grundlinie parallel liegt, so zeigt der entsprechende Grundriss die Linie in ihrer wahren Länge (§. 11, c.).

Tab. VI
Fig. 12. So stelle z. B. ba Fig. 12 Grund- und Aufriss einer geraden Linie dar, welche im Grundriss sowohl, wie auch im Aufriss verkürzt erscheint. Um diese Linie im Grundriss unverkürzt zu erhalten, wird der Aufriss soweit gewendet, dass die gewendete Linie ba' horizontal liegt und dann zu dem gewendeten Aufriss nach den obigen Regeln den Grundriss gesucht. Der so gefundene Grundriss ba' zeigt die Linie in ihrer wahren Länge.

Der ursprüngliche Grund- und Aufriss ba Fig. 10 ist dem ursprünglichen Grund- und Aufriss ba in Fig. 12 vollkommen gleich, deshalb muss auch die wahre Länge ba' im Aufriss der Fig. 10, wie sie sich durch Wenden des Grundrisses ergeben hat, gleich sein der wahren Länge ba' im Grundriss der Fig. 12, wie sie durch Wenden des Aufrisses erhalten wurde.

- 14 **Durchschnittspunkte der geraden Linie mit der Senkfläche und der Grundfläche.** In Fig. 14, Tab. VII stellt BA eine begränzte gerade Linie im Raume dar. Es sei nun ferner LM die Senkfläche und ba die Projection von BA auf dieselbe oder mit andern Worten es sei ba der Aufriss der Linie BA . — NO ist die rechtwinkelig zur Senkfläche stehende Grundfläche, $b'a'$ ist also die Horizontalprojection oder der Grundriss von BA .

Denken wir uns die gerade Linie BA über A hinaus verlängert, so trifft diese Verlängerung die Senkfläche im Punkte s , während die nach der anderen Seite verlängerte Linie AB die Grundfläche im Punkte q trifft.

In s trifft die Verlängerung der Geraden BA mit der Verlängerung ihres Aufrisses ba zusammen; in q dagegen schneiden sich die Verlängerung der Geraden AB und die Verlängerung ihres Grundrisses $a'b'$.

Ein von q auf die Grundlinie (die Durchschnittslinie der Senkfläche LM mit der Grundfläche NO) gefällttes Perpendikel muss die Grundlinie in demselben Punkte p treffen, in welchem die Verlängerung des Aufrisses ab die Grundlinie schneidet.

Ebenso muss ein von s auf die Grundlinie gefällttes Perpendikel die Grundlinie in demselben Punkte r treffen, in welchem sie von der Verlängerung des Grundrisses $b'a'$ getroffen wird.

Wird nun die Grundfläche NO um die Grundlinie als Axe gedreht, bis sie in eine Ebene mit der Senkfläche fällt und die Verlängerung derselben bildet, bis sie also in die Lage

$N'O'$ gekommen ist, so ergibt sich auch für diese neue Lage der Grundfläche, dass die Punkte q und s in folgender Weise gefunden werden:

1) Man verlängere den Aufriss ab bis zum Durchschnitte mit der Grundlinie und errichte dann im Grundriss im Durchschnittpunkte p ein Perpendikel auf der Grundlinie. Der Punkt q , in welchem dies Perpendikel von der Verlängerung des Grundrisses ab geschnitten wird, ist derjenige, in welchem die Verlängerung der durch Grund- und Aufriss gegebenen Geraden die Grundfläche trifft.

2) Um den Punkt s zu finden, in welchem die durch Grund- und Aufriss gegebene Gerade die Senkfläche trifft, verlängere man den Grundriss bis zur Durchschneidung mit der Grundlinie bei r und ziehe durch r eine Linie rechtwinkelig zur Grundlinie. Da, wo dieses Perpendikel von der Verlängerung des Aufrisses geschnitten wird, ist der gesuchte Punkt s .

In Fig. 13, Tab. VI ist diese Construction für den in eine Ebene gelegten Grund- und Aufriss allein gegeben mit Hinweglassung der in Fig. 14 nur zur Vermittelung des Verständnisses gegebenen perspectivischen Ansicht der in ihrer wahren Lage befindlichen Grundfläche ON und der Linie AB im Raume. Tab. VI
Fig. 13.

Zur Uebung bestimme man die Punkte q und s für den Fall, dass Grund- und Aufriss des begrenzten Linienstückes ungefähr die Lage haben wie in Fig. 15. Tab. VII
Fig. 15.

In allen bis jetzt in diesem Paragraphen besprochenen Fällen war die gerade Linie, deren Durchschnitt mit der Grundfläche und mit der Senkfläche gesucht wurde, so gelegt, dass der untere Theil derselben vor-, der obere dagegen zurückstand, d. h. die tieferen Punkte der betrachteten Geraden lagen weiter von der Senkfläche nach Vorn entfernt als die höheren. Wenn dem nicht so ist, wenn die höheren Punkte der durch Grund- und Aufriss gegebenen Geraden weiter vorliegen als die tieferen, wie dies in den Fig. 16 und 17 gegebenen Beispielen der Fall ist, so liegt entweder der Durchschnittspunkt s der gegebenen Geraden mit der Senkfläche unter der Grundlinie, wie Fig. 16, oder der Durchschnittspunkt q der Geraden mit der Grundfläche liegt hinter der Senkfläche, wie Fig. 17. Tab. VII
Fig. 16 u.
Fig. 17.

Man suche sich für diese Fälle die Lage der Geraden durch Benutzung des Modells, Fig. 2, Tab. III anschaulich zu machen.

Durch zwei gegebene Punkte ist eine gerade Linie jederzeit vollständig bestimmt, sie ist es also auch, wenn man die beiden Punkte q und s angiebt, in welchen sie die Grundfläche und die Senkfläche treffen soll. Sind die beiden Punkte gegeben, so findet man Grund- und Aufriss der durch sie bestimmten Geraden, wenn man, wie es Fig. 18, 19 und 20 geschehen ist, von s und q die Perpendikel sr und pq auf die Grundlinie fällt und dann eine Gerade durch s und p und eine zweite durch q und r legt. Erstere ist der Aufriss, letzteres ist der Grundriss der durch s und q gehenden Geraden. Tab. VII
Fig. 18, 19,
u. Fig. 20.

Durchschneidung zweier gerader Linien. Zwei in einer Ebene liegende, genügend verlängerte gerade Linien müssen sich jedenfalls schneiden, wenn sie nicht parallel sind; im Raume aber können zwei gerade Linien neben einander herlaufen, ohne sich zu schneiden, auch wenn sie nicht parallel sind. 15

Da die Aufrisse zweier benachbarter gerader Linien in einer und derselben Ebene, nämlich in der Senkfläche liegen, so müssen sie sich nothwendig schneiden, es sei denn, dass sie einander parallel sind.

Ebenso liegen die Grundrisse zweier benachbarter geraden Linien in einer und dersel-

ben Ebene, der Grundfläche, die beiden Grundrisse müssen sich also ebenfalls schneiden, wenn sie nicht parallel sind.

Daraus dass sich einerseits die beiden Aufrisse, andererseits die beiden Grundrisse schneiden, folgt aber durchaus nicht, dass die, diesen Grund- und Aufrissen entsprechenden Geraden im Raume sich schneiden.

Tab. VIII Eine Durchschneidung zweier gerader Linien im Raume findet nur dann statt, wenn der Kreuzungspunkt im Aufriss vertikal über dem Kreuzungspunkt im Grundriss liegt, wie in Fig. 21 u. Fig. 22. Fig. 21. Ist dies nicht der Fall, wie z. B. in Fig. 22, trifft ein vom Kreuzpunkt des Aufrisses auf die Grundlinie gefällttes und in den Grundriss verlängertes Perpendikel die Grundrisse der beiden Linien in zwei getrennten Punkten f und g , so ergibt sich daraus, dass im Kreuzpunkt des Aufrisses die Vertikalprojectionen zweier im Raume getrennter Punkte zusammenfallen.

Ebenso sehen wir aus dem Aufriss Fig. 22, dass im Kreuzungspunkt des Grundrisses nicht die Horizontalprojection eines einzigen, sondern die Horizontalprojection zweier verschiedener vertikal über einander liegenden Punkte h und k repräsentirt ist.

D r i t t e s C a p i t e l .

E b e n e F l ä c h e n u n d b e g r ä n z t e e b e n e F i g u r e n .

16 **Grund- und Aufriss ebener Figuren.** Ein Dreieck, ein Viereck, ein Fünfeck u. s. w. erscheint im Allgemeinen im Grundriss sowohl, wie auch im Aufriss wieder als Dreieck, als Viereck, als Fünfeck u. s. w. So stellt z. B. Fig. 23 Grund- und Aufriss eines Dreiecks dar. Tab. VIII Fig. 23. — Aus dem Aufriss ersehen wir, dass der Punkt a unter den drei Eckpunkten des Dreiecks der höchste, dass von den beiden anderen Punkten der links liegende b der tiefste ist; welcher dieser drei Punkte am weitesten vor- oder zurückliegt, ergibt sich erst aus der Betrachtung des Grundrisses, welche zeigt, dass b am weitesten zurück, a am weitesten vorliegt.

Tab. VIII Fig. 24. In dem Fig. 24, Tab. VIII dargestellten Fall, ist der Aufriss dem der Fig. 23 vollkommen gleich; aus dem Grundriss Fig. 24 ist aber zu ersehen, dass hier b am weitesten vor, a am weitesten zurückliegt.

Ehe man weiter geht, suche man sich diese Verhältnisse recht anschaulich zu machen, wozu man, wenn es nöthig sein sollte, das Modell Fig. 2, Tab. III und ein aus Papier oder Pappendeckel geschnittenes Dreieck anwenden kann, dessen Grund- und Aufriss man für verschiedene Lagen des Dreiecks im Raume mit Kreide oder Bleistift auf die Projectionsflächen aufziehen kann.

Besondere Fälle. Als besondere Fälle der Stellung ebener Figuren sind folgende zu 17
merken.

a) Eine ebene Figur, welche in einer vertikalen Ebene liegt, welche also rechtwinkelig auf der Grundfläche steht, erscheint im Grundriss zur geraden Linie verkürzt, wie z. B. das unregelmässige Fünfeck $abcdf$ Fig. 25.

Tab. VIII

b) Eine ebene Figur, welche rechtwinkelig auf der Senkfläche steht, erscheint im Aufriss zur geraden Linie verkürzt, wie dies z. B. für das unregelmässige Fünfeck $abcdf$ Fig. 26 der Fall ist.

Fig. 26.

c) Eine ebene Fläche, welche parallel mit der Grundfläche läuft, erscheint im Aufriss als horizontale Linie (Fig. 27 Tab. VIII).

Tab. VIII

Im Grundriss selbst erscheint eine solche, mit der Grundfläche parallele, im Aufriss zu einer horizontalen Linie verkürzte ebene Figur unverkürzt, also in ihrer wahren Gestalt.

Fig. 27.

d) Eine ebene Figur, welche mit der Senkfläche parallel läuft, erscheint im Grundriss als eine mit der Grundlinie parallele Gerade, Fig. 28, Tab. IX im Aufriss aber erscheint sie in ihrer wahren Gestalt.

Tab. IX
Fig. 28.

e) Eine ebene Figur, welche zugleich auf der Senkfläche und auf der Grundfläche rechtwinkelig steht, erscheint im Grundriss sowohl, wie im Aufriss zur geraden Linie verkürzt, und zwar im Grundriss als eine auf der Grundlinie rechtwinkelig stehende Gerade, wie Fig. 31 erläutert, welche Grund- und Aufriss eines in der eben ange- deuteten Lage befindlichen Vierecks darstellt.

Tab. IX
Fig. 31.

Nach den unter c und d besprochenen Fällen kann eine ebene Figur, welche sowohl im Grundriss als auch im Aufriss mit flächenhaften Dimensionen erscheint, wie das Dreieck Fig. 23 und Fig. 24 auf Tab. VIII, weder im Grundriss noch im Aufriss unverkürzt sein.

Wenden des Grundrisses oder des Aufrisses. Das Wenden des Grundrisses oder 18
des Aufrisses kann auch bei den Projectionen ebener Figuren ganz nach denselben Principien vorgenommen werden, welche wir in den Paragraphen 12 u. 13 kennen lernten, nämlich:

1) Bei der Wendung des Grundrisses behält der Grundriss seine Gestalt unverändert bei, nur seine Lage gegen die Grundlinie wird verändert.

Da eine Wendung des Grundrisses durch Drehung um eine vertikale (auf der Grundfläche rechtwinkelig stehende) Axe erfolgt, so behalten dabei alle Punkte des Aufrisses ihre ursprüngliche Höhe unverändert bei.

2) Bei einer Wendung des Aufrisses behält dieser seine Gestalt unverändert bei, nur seine Lage gegen die Grundfläche wird geändert; im Grundriss aber bleibt bei einer Wendung des Aufrisses der Abstand eines jeden Punktes von der Grundlinie völlig unverändert.

Wenden wir dies auf einzelne Fälle an:

a) Eine ebene Fläche erscheine im Aufriss zu einer horizontalen Linie verkürzt im Grundriss, also in ihrer wahren Gestalt, wie z. B. das regelmässige Fünfeck $abcdf$ Fig. 32. Wird nun der Aufriss um den Punkt c (oder vielmehr um die zum Punkt verkürzte Gerade cd) so weit gedreht, dass a nach a' kommt, also f und b nach f' und b' , so ergibt sich der neue Grundriss, wenn man von jedem Punkt des gewendeten Aufrisses eine Vertikale herunter- und von dem entsprechenden Punkt des alten Grundrisses eine Horizontale herüberzieht, bis sich beide schneiden. Auf diese Weise sind die Punkte a' , b' und f' des neuen Grundrisses ge-

Tab. IX
Fig. 32.

funden, welche mit den unverändert gebliebenen Punkten c und d das verkürzte Fünfeck $a' b' d c f'$ bilden.

In Fig. 32 ist nun der Aufriss abermals weiter gedreht, so dass a nach a'' , b und f nach b'' und f'' kommen und dann die Lage dieser Punkte a'' , b'' und f'' im Grundriss bestimmt worden, wodurch sich dann das noch mehr verkürzte Fünfeck $a'' b'' d c f''$ ergibt.

Endlich ist die Drehung des zur Linie verkürzten Aufrisses so weit fortgesetzt worden, bis diese Linie rechtwinkelig auf ihrer ursprünglichen Stellung steht, bis also a nach a''' , vertikal über c gekommen ist; in diesem Fall erscheint die ganze Figur auch im Grundriss zur Linie verkürzt (§. 17, e).

Aus der Betrachtung der Figur 32 ergibt sich, dass eine im Aufriss zur geraden Linie verkürzte ebene Figur im Grundriss um so mehr verkürzt erscheint, je grösser der Winkel ist, welchen der Aufriss mit der Horizontalen macht.

Tab. IX
Fig. 33.

Fig. 33 stellt im Grundriss einen Kreis dar, welcher mit der Grundfläche parallel im Grundriss unverkürzt, im Aufriss aber zur geraden Linie verkürzt erscheint. Wird der Aufriss nun gewendet, so muss der Kreis im Grundriss verkürzt erscheinen. Um diesen verkürzten Kreis darzustellen, theile man den ursprünglich gegebenen Kreis in 12 gleiche Theile und trage die Theilpunkte a, b, c, d u. s. w. in den Aufriss, wie Fig. 33 zeigt. Wird nun der Aufriss aus seiner horizontalen Lage ga in die schräge Lage ga' gebracht, so kommen m und b nach m' und b' , l und c nach l' und c' u. s. w.

Die Lage jedes dieser Punkte $m', b', l' c'$ u. s. w. wird nun im Grundriss ebenso bestimmt, wie es für die Eckpunkte des im Aufriss gewendeten Fünfecks Fig. 32 geschehen ist, in der Weise also, als ob man es mit einem regelmässigen Zwölfeck zu thun hätte. Sind die 12 Eckpunkte des neuen Grundrisses gefunden, so verbindet man sie durch eine krumme Linie, welche man aus freier Hand so zieht, dass sie sich den gegebenen Punkten möglichst vollkommen anschliesst.

Die auf diese Weise construirte Curve ist eine Ellipse. Der Kreis erscheint in seiner Verkürzung stets als Ellipse.

Da es von der höchsten Wichtigkeit ist, dass der Schüler grosse Gewandtheit und Sicherheit in der Construction verkürzt erscheinender Kreise erlangt, so muss die obige Construction für verschieden starke Wendungen des Aufrisses ausgeführt werden.

Man ziehe z. B. im Grundriss einen Kreis von 3 Centimeter Radius und wende den zur horizontalen Linie verkürzten Aufriss zuerst um 40° , dann um 65° und endlich um 80° und construire für jeden der gewendeten Aufrisse den zugehörigen Grundriss.

Wenn der zu wendende Kreis sehr gross ist, muss man, um die Ellipse mit Sicherheit ziehen zu können, noch mehr als 12 Punkte des Kreisumfangs in Anwendung bringen, und zwar wählt man dann die weiteren Punkte an solchen Stellen, welche nach der Wendung in die Gegend der stärksten Krümmung fallen, also z. B. einen Punkt in der Mitte zwischen c und d , einen zweiten zwischen d und e , einen dritten zwischen i und k und einen vierten in der Mitte zwischen k und l der Fig. 33.

Bei kleineren Kreisen kann man sich zur Ausführung dieser Construction mit 8 oder auch nur mit 6 Punkten des Kreisumfangs begnügen.

Tab. IX
Fig. 30

b) Eine ebene Figur erscheine im Grundriss als eine mit der Grundlinie parallele Gerade, im Aufriss also unverkürzt (§. 17, d), wie das regelmässige Sechseck $abcdef$ Fig. 30. Wird der Grundriss um einen beliebigen Punkt, etwa um d gewendet, so erscheint nun der Auf-

riss um so mehr verkürzt, je grösser der Winkel ist, welchen der gewendete Grundriss mit der Grundlinie macht. Unsere Figur stellt den gewendeten Grundriss in drei verschiedenen Stellungen dar. — Wie zu dem gewendeten Grundriss der entsprechende Aufriss gefunden wird, bedarf wohl keiner Erklärung mehr, es wird durch Fig. 30 hinlänglich erläutert.

Figur 34 stellt einen Kreis dar, welcher im Aufriss unverkürzt, im Grundriss aber als eine mit der Grundlinie parallele Gerade erscheint; der Grundriss ist gewendet und zu dem gewendeten Grundriss der neue Aufriss gesucht. — Der Schüler führe diese Construction an einem etwas grösseren Kreis für zwei verschiedene Grade der Wendung des Grundrisses aus.

Bestimmung der wahren Gestalt ebener Figuren. Um die wahre Gestalt ebener Figuren zu ermitteln, für welche weder die im Paragraph 17 unter d) noch die unter e) ausgesprochene Bedingung erfüllt ist, kann man die Wendung des Grundrisses oder die Wendung des Aufrisses in Anwendung bringen und auf diese Weise die ebene Figur entweder im Grundriss oder im Aufriss in ihrer wahren Gestalt erhalten. Wir wollen der Reihe nach die einzelnen Fälle betrachten, welche hier in Anwendung kommen können.

1) Die ebene Figur ist im Grundriss zu einer geraden Linie verkürzt, welche nicht mit der Grundlinie parallel läuft, wie das Viereck $abcd$ Fig. 25, Tab. VIII. Tab. VIII

In diesem Falle wende man den Grundriss, bis er mit der Grundlinie parallel läuft, wie dies in Fig. 29 für das eben besprochene Viereck ausgeführt ist, und construire nach den bekannten Regeln zu dem gewendeten Grundriss den zugehörigen Aufriss. Der auf diese Weise gefundene Aufriss stellt das fragliche Viereck unverkürzt in seiner wahren Gestalt dar (§. 17). Fig. 25. Tab. IX

2) Die ebene Figur erscheint im Aufriss zu einer geraden Linie verkürzt, welche nicht mit der Grundlinie parallel läuft, wie das Fünfeck $abcdf$ Fig. 26, Tab. VIII. Tab. VIII

In diesem Falle wendet man den Aufriss bis er mit der Grundlinie parallel läuft und sucht den zum gewendeten Aufriss gehörigen Grundriss, wie dies Fig. 27 getrennt von der ursprünglichen Figur ausgeführt ist. Der Grundriss $abcdf$ Fig. 27 zeigt das fragliche Fünfeck in seiner wahren Gestalt. Fig. 26. Tab. VIII

Als ein besonderer Fall des unter 1) oder des unter 2) besprochenen Verhältnisses muss es betrachtet werden, wenn eine ebene Figur im Grundriss sowohl, wie im Aufriss zur geraden Linie verkürzt erscheint, wie das Viereck $abcd$ Fig. 31. Man kann deshalb die wahre Gestalt dieser Figur sowohl nach der unter 1) als auch nach der unter 2) gegebenen Regel, d. h. sowohl durch Wenden des Grundrisses als auch durch Wenden des Aufrisses finden. Ersteres ist in Fig. 35, Letzteres ist in Fig. 36 ausgeführt. Wir sehen deshalb die wahre Gestalt des Vierecks, welches in Fig. 31 sowohl im Grundriss als auch im Aufriss zur Linie verkürzt erschien, im Aufriss der Fig. 35 und im Grundriss der Fig. 36. Tab. IX Fig. 31. Tab. X Fig. 35 u. Fig. 36.

3) Die durch Grund- und Aufriss gegebene Figur erscheint in Ersterem sowohl wie in Letzterem mit flächenhaften Dimensionen, also weder im Grundriss noch im Aufriss zur Linie verkürzt, wie z. B. das Dreieck abd Fig. 37. Tab. X Fig. 37.

Um in diesem Fall die wahre Gestalt der durch Grund- und Aufriss gegebenen Figur zu finden, sind nach einander drei Wendungen sammt den zugehörigen Operationen auszuführen, wie dies in Fig. 37 und 38 beispielsweise für das Dreieck abd geschehen ist.

Zuerst ist das Dreieck im Aufriss so gewendet worden, dass eine Seite desselben,

nämlich ad horizontal zu liegen, also in die Stellung ad' kommt; zu dem so gewendeten Aufriss wird nach den bekannten Regeln der Grundriss $ab'd'$ Fig. 37 gesucht.

Tab. X
Fig. 38.

Sodann wird dieser neue Grundriss so gewendet, dass die horizontale Seite ad' desselben rechtwinkelig zur Grundlinie zu stehen kommt, wie dies Fig. 38 in der Weise ausgeführt ist, dass das Dreieck $ab'd'$ aus dem Grundriss Fig. 37 in gehöriger Stellung in den Grundriss Fig. 38 übertragen worden ist.

Zu dem Grundriss $ab'd'$ Fig. 38 ist nun der Aufriss zu suchen. Er zeigt das Dreieck $ad'b'$ zur geraden Linie verkürzt, weil eine Seite desselben, nämlich ad' zum Punkt verkürzt ist (§. 17). Wie die Punkte dieses neuen Aufrisses gefunden werden, bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung; b' muss im Aufriss Fig. 38 ebenso hoch über d' und a liegen, wie in Fig. 37.

Nachdem man es auf diese Weise dahin gebracht hat, dass die fragliche ebene Figur (hier das Dreieck) im Aufriss zur Linie verkürzt erscheint, wird endlich diese Linie durch eine dritte Wendung in horizontale Lage gebracht (in die Lage ab'') und zu derselben der entsprechende Grundriss $ad'b''$ Fig. 38 gesucht, welcher die wahre Gestalt des besprochenen Dreiecks zeigt.

Wir haben in dem eben besprochenen Beispiel die erste Wendung im Aufriss vorgenommen und die wahre Gestalt der ebenen Figur im Grundriss erhalten. Man hätte aber auch mit einer Wendung des Grundrisses beginnen können und hätte alsdann die gesuchte wahre Gestalt der ebenen Figur im Aufriss erhalten.

Tab. X
Fig. 39 u.
Fig. 40.

Ein derartiges Beispiel ist in Fig. 39 und Fig. 40 durchgeführt. Ein Viereck $abcd$ erscheint im Aufriss Fig. 39 sowohl wie im Grundriss derselben Figur als Quadrat. Um die wahre Gestalt dieses Vierecks zu finden, wird zuerst der Grundriss gewendet, bis die Seite ad in die Lage ad' gekommen, also der Grundlinie parallel geworden ist; zu diesem gewendeten Grundriss wird der Aufriss $ab'c'd'$ Fig. 39 gesucht, welcher alsdann in Fig. 40 so gestellt ist, dass die Seite ad' vertikal steht. In dem zu dem Aufriss $ab'c'd'$ Fig. 40 gehörigen Grundriss erscheint unser Viereck zur Linie verkürzt, welche mit der Grundlinie parallel gelegt, also in die Lage $ad'b''c''$ gebracht wird; zieht man endlich von $b''c''$ vertikal in die Höhe, von b' und c' des vorigen Aufrisses Fig. 40 horizontal nach der Linken, so findet man die Punkte b'' und c'' , welche mit a und d' Fig. 40 die Eckpunkte des nun unverkürzt erscheinenden Vierecks bilden. Das Viereck $ad'b''c''$ im Aufriss Fig. 40 ist die wahre Gestalt desjenigen, welches im Grund- und Aufriss Fig. 39 als ein Quadrat $abcd$ erscheint.

20

Durchschnittslinien einer ebenen Fläche mit der Grund- und der Senkfläche.

Ebenso wie jede gerade Linie bei genügender Verlängerung sowohl die Grundfläche als auch die Senkfläche treffen muss (wenn sie nicht mit denselben parallel läuft), so muss auch jede Ebene bei genügender Ausdehnung nach allen Seiten hin sowohl die Senkfläche als auch die Grundfläche schneiden, wenn sie nicht mit einer derselben parallel läuft.

Der Durchschnitt je zweier Ebenen ist stets eine gerade Linie, folglich ist auch der Durchschnitt einer Ebene mit der Senkfläche eine gerade Linie, wie denn auch die Grundfläche von jeder nicht mit ihr parallelen Ebene in einer geraden Linie geschnitten wird.

Die Durchschnittslinien einer Ebene mit der Grundfläche und der Senkfläche werden Grundschnitte oder Tracen genannt. Die Durchschnittslinie einer Ebene mit der Grund-

fläche wollen wir den Grundflächenschnitt, die Durchschnittslinie einer Ebene mit der Senkfläche wollen wir den Senkflächenschnitt nennen.

Der Grundflächenschnitt und der Senkflächenschnitt einer Ebene müssen in einem Punkte der Grundlinie zusammentreffen, weil die Grundlinie nur einen Punkt mit einer Ebene gemein haben kann, in welcher sie nicht ihrer ganzen Länge nach liegt.

Um sich eine klare Anschauung davon zu verschaffen, wie durch die beiden Tracen die Lage einer Ebene bestimmt ist, ziehe man auf einem Papierblatt zunächst die Grundlinie und trage dann die Tracen ab und ac in ähnlicher Weise auf, wie dies Fig. 41, Tab. XI geschehen ist. Nachdem die Grundschnitte aufgetragen sind, breche man das Papier in der Richtung der Grundlinie und stelle die obere, den Aufriss enthaltende Hälfte vertikal auf, während die untere Hälfte mit dem Grundriss horizontal liegen bleibt. Sind auf diese Weise Grund- und Aufriss in ihre wahre gegenseitige Stellung gebracht, so kann man leicht die Lage der durch die beiden Grundschnitte bestimmten Ebene übersehen.

Auf dieselbe Weise veranschauliche man sich die Lage der Ebenen, welche durch ihre Grundschnitte ab und ac in Fig. 42 und Fig. 43, Tab. XI gegeben sind.

Es versteht sich von selbst, dass man beim Unterricht das gebrochene Papierblatt durch den Apparat Fig. 2, Tab. III ersetzen kann, um die Bestimmung einer Ebene durch ihre Grundschnitte anschaulich zu machen.

Eine Ebene, welche mit der Grundlinie parallel läuft, kann diese nicht treffen, folglich können auch ihre Tracen keinen Punkt mit der Grundlinie gemein haben oder mit anderen Worten: die Grundschnitte einer Ebene, welche mit der Grundlinie parallel läuft, sind mit der Grundlinie parallele Linien; so sind z. B. ab und cd Fig. 44 die Grundschnitte einer mit der Grundlinie parallelen Ebene.

Ermittelung der Grundschnitte einer durch drei gegebene Punkte gelegten Ebene. So wie durch zwei Punkte eine gerade Linie, so ist durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte eine Ebene bestimmt. Es sei nun die Aufgabe gestellt, die Grundschnitte einer Ebene zu suchen, welche durch drei gegebene Punkte gelegt ist.

In Fig. 45, Tab. XI seien abc die Vertikalprojectionen und die Horizontalprojectionen der drei gegebenen Punkte. Man kann diese drei Punkte als die Eckpunkte eines Dreiecks betrachten.

Um den Senkflächenschnitt der durch das Dreieck abc gelegten Ebene zu construiren, muss man zwei Punkte desselben suchen. Solche zwei Punkte findet man aber, wenn man die Punkte bestimmt, in welchen die Verlängerung zweier Dreieckseiten die Senkfläche trifft.

Nach dem in §. 14 besprochenen Verfahren ergibt sich o als der Punkt, in welchem die Verlängerung der Linie ab , und p als der Punkt, in welchem die Verlängerung der Linie cb die Senkfläche treffen; eine durch die beiden Punkte p und o gelegte Gerade ist also der gesuchte Senkflächenschnitt.

Auf ähnliche Weise ergibt sich der Grundflächenschnitt. Nach dem Verfahren des §. 14 ergibt sich r als der Punkt, in welchem die Verlängerung der Linie bc , und s als der Punkt, in welchem die Verlängerung der Linie ab die Grundfläche trifft; folglich ist eine durch r und s gelegte gerade Linie der Grundflächenschnitt, der durch die drei Punkte a , b und c gelegten Ebene.

Der durch die Punkte o und p gelegte Senkflächenschnitt und der durch die Punkte r

und s gelegte Grundflächenschnitt müssen sich in einem und demselben Punkte der Grundlinie schneiden. Ist also der Senkflächenschnitt und dadurch die Lage des Punktes n ermittelt, so bedarf man, um den Grundschnitt ziehen zu können, nur eines der beiden Punkte r und s .

Tab. XI Zur Uebung construiren man die Grundschnitte der Ebene, welche durch das Dreieck
Fig. 46. gelegt ist, dessen Grund- und Aufriss Fig. 46, Tab. XI zeigt. Es wird gut sein, die Zeichnung in doppelter Grösse der Fig. 46 auszuführen.

In gleicher Weise construiren man die Grundschnitte der Ebenen, welche man durch die Dreiecke legen kann, deren Grund- und Aufriss in Fig. 23 und Fig. 24 der Tab. VIII gegeben sind.

22 **Durchschnittslinie zweier Ebenen.** Zwei Ebenen schneiden sich, wie schon bemerkt wurde, stets in einer geraden Linie (es sei denn, dass sie mit einander parallel laufen). Diese Durchschnittslinie findet man aber, indem man zwei ihrer Punkte ermittelt.

Tab. XII Sind nun zwei Ebenen durch ihre Grundschnitte gegeben, wie z. B. die eine durch die
Fig. 47. Grundschnitte ab und ac Fig. 47, Tab. XII und die andere durch ihre Grundschnitte df und dg , so ist der Durchschnittspunkt o der beiden Senkflächenschnitte ein Punkt, welcher beiden Ebenen gemeinschaftlich ist, also ein Punkt der gesuchten Durchschnittslinie. Ebenso ist der Durchschnittspunkt p der beiden Grundflächenschnitte ein Punkt der Durchschnittslinie der beiden Ebenen, folglich ist die durch o und p gelegte Gerade die Durchschnittslinie der durch ihre Grundschnitte ab und ac , df und dg gegebenen Ebenen.

Demnach ist op' der Aufriss und po' der Grundriss der Durchschnittslinie unserer beiden Ebenen. (Vergl. §. 14.)

Tab. XII Ein anderes Beispiel der Durchschneidung zweier Ebenen ist in Fig. 48 gegeben. Auch
Fig. 48. hier sind ab und ac die Tracen der einen, df und dg die der anderen Ebene; op' ist die Vertikalprojection, po' ist die Horizontalprojection ihrer Durchschnittslinie.

Viertes Capitel.

Darstellung von Körpern, welche durch ebene Flächen begränzt sind.

23 **Langwürfel.** Wie Grund- und Aufriss eines durch ebene Flächen begränzten Körpers zu entwerfen sind, hängt davon ab, auf welche Weise derselbe bestimmt, definirt ist. Am einfachsten ist die Darstellung von Langwürfeln, d. h. von Körpern, welche durch sechs ebene Flächen begränzt sind, von denen je zwei einander parallel liegen, aber auf den vier anderen rechtwinkelig stehen.

Jeder Langwürfel hat zwölf Kanten, von denen je vier einander gleich und parallel sind. Ferner hat jeder Langwürfel acht Ecken, in deren jeder drei Kanten so zusammenstossen, dass jede derselben rechtwinkelig steht auf der Ebene der beiden anderen.

Für die Darstellung des Langwürfels ist es am zweckmässigsten, von einer solchen Stellung desselben auszugehen, bei welcher vier seiner Kanten mit der Grundlinie parallel laufen, während vier andere rechtwinkelig auf der Grundfläche und die übrigen vier rechtwinkelig auf der Senkfläche stehen, wie dies bei dem Fig. 49, Tab. XIII im Grund- und Aufriss dargestellt Langwürfel der Fall ist. Tab. XIII
Fig. 49.

Jede der vier Kanten dieses Langwürfels, welche mit der Grundlinie parallel laufen sollen, möge eine Länge von 10 Linien haben. Jede der vier auf der Senkfläche rechtwinkelligen Kanten sei 6 Linien, jede der vier vertikalen also auf der Grundfläche rechtwinkelligen Kanten sei 14 Linien lang.

Man zeichne zunächst im Grundriss ein längliches Rechteck $abcd$, dessen beide mit der Grundlinie parallele Seiten ab und cd je 10 Linien lang sind, während die Länge von ac und bd gleich 6 Linien ist.

Dieses längliche Rechteck stellt die Basis unsers Langwürfels dar. Im Aufriss erscheint es zur Linie, die beiden Kanten ca und cb aber zu Punkten verkürzt.

Nun zieht man durch die Punkte c und d des Aufrisses Vertikale, auf denen man die Längen cf und dg gleich 14 Linien abmisst. Verbindet man die Punkte f und g durch eine Gerade, so ist $cfgd$ die Vorderfläche unsers Langwürfels.

Der Punkt f fällt als gerade über c liegend im Grundriss mit diesem zusammen, die Linie fc erscheint also im Grundriss zum Punkt verkürzt. Wir deuten dies im Grundriss Fig. 49 einfach dadurch an, dass wir den Buchstaben f vor c setzen.

Ebenso erscheint die Kante gd im Grundriss zur Linie verkürzt, der Punkt g fällt im Grundriss mit dem Punkte d zusammen, und weil g über d liegt, wird der Buchstaben g im Grundriss vor d gesetzt.

Die ganze vordere Fläche $cfgd$ des Langwürfels erscheint im Grundriss zur Linie verkürzt.

Um Grund- und Aufriss unsers Langwürfels zu vollenden, haben wir nur noch einige Buchstaben beizusetzen.

Eine durch a gezogene Senkrechte fällt nämlich im Aufriss gerade hinter die Linie cf , und wenn sie mit cf gleiche Länge hat, so kommt ihr oberer Endpunkt h gerade hinter f zu liegen, der Buchstaben h ist deshalb im Aufriss rechts hinter f zu setzen. Im Grundriss aber liegt der Punkt h gerade über a , h ist also im Grundriss vor a zu setzen.

In gleicher Weise liegt der Eckpunkt i hinter g und über b .

Suchen wir nun die einzelnen Flächen des Langwürfels in unserer Figur auf.

Die obere Fläche ist $fhgi$ im Grundriss in ihrer wahren Gestalt, im Aufriss zur Linie verkürzt erscheinend. Ihr parallel liegt die unterste Fläche $cabd$.

Die vordere Fläche des Langwürfels ist $fgdg$, die hintere dagegen ist $habi$. Beide erscheinen im Aufriss in ihrer wahren Gestalt, im Grundriss zur Linie verkürzt.

Die Seitenfläche rechts ist $gdbi$, die Seitenfläche links ist $fcah$. Beide erscheinen im Grund- und Aufriss zu Linien verkürzt.

Die vier Kanten des Langwürfels, welche mit der Grundlinie parallel laufen, sind hi ,

ab , fg und cd . Sie erscheinen im Grundriss sowohl, wie auch im Aufriss in ihrer wahren Länge.

Die vier auf der Grundfläche rechtwinkeligen Kanten sind cf , ah , dg und bi ; sie erscheinen im Aufriss unverkürzt, im Grundriss zum Punkte verkürzt.

Die vier auf der Senkfläche rechtwinkeligen Kanten sind fh , gi , ca und db . Sie erscheinen im Aufriss zum Punkt verkürzt, im Grundriss dagegen in ihrer wahren Länge.

Aus dem Aufriss allein lässt sich also die Länge der Kanten fc , ha , gd und ib , ferner die Länge der Kanten fg , hi , cd und ab entnehmen; wie gross jedoch die Länge der Kanten fh , gi , ca und db ist, lässt sich aus dem Aufriss nicht ersehen.

Der Grundriss giebt die wahre Länge der Kanten hf , ac , ig und bd , ferner der Kanten hi , ab , fg und cd ; aber man ersieht aus dem Grundriss nicht, wie lang die Kanten ha , ib , fc und gd sind.

Also weder aus dem Grundriss allein, noch aus dem Aufriss allein lassen sich die Dimensionen unsers Langwürfels vollständig erkennen. Erst durch die Combination von Grund- und Aufriss ist derselbe vollständig gegeben.

Ein übersichtliches Bild erhalten wir aber durch den Grund- und Aufriss Fig. 49 durchaus nicht. Es bedarf einer sorgfältigen Vergleichung der zusammengehörigen Buchstaben im Grund- und Aufriss, um sich über die Lage der einzelnen Punkte, Kanten und Flächen zu unterrichten. Ein mehr übersichtliches Bild lässt sich aber leicht dadurch erhalten, dass man die Stellung des Körpers gegen die Grund- und Senkfläche ändert, also durch Wenden.

Tab. XIII Auf Tab. XIII sind nun mit unserm Langwürfel zwei Wendungen vorgenommen worden. Fig. 50. Zunächst wurde in Fig. 50 der Aufriss um die zum Punkt verkürzte Kante ca so gewendet, dass die bisher vertikalen Kanten nun ungefähr einen Winkel von 10° mit den Vertikalen machen, und dann zu diesem gewendeten Aufriss nach den in §. 13 gegebenen Regeln der Grundriss construirt. In diesem Grundriss fällt nun schon die Kante fh nicht mehr mit ca , und gi nicht mehr mit db zusammen; aber die vordere Fläche $fc dg$ und die hintere $habi$ erscheinen noch zu Linien verkürzt.

Der nun erhaltene Grundriss Fig. 50 wird nun so gewendet, dass die Kanten bd , gi u. s. w. einen Winkel von ungefähr 15° mit der Grundlinie machen, wie dies Fig. 51 geschehen ist. In dem zu dem Grundriss Fig. 51 nach den bekannten Regeln construirten Aufriss erscheint nun in der That keine Fläche des Langwürfels mehr zur Linie verkürzt, der Aufriss Fig. 51 giebt ein anschaulicheres Bild des Langwürfels als die Grund- und Aufrisse Fig. 49 und Fig. 50; dagegen entbehrt er des Vortheils, dass man in ihm direct die wahren Längen der Kanten abmessen kann.

Zur Uebung zeichne der Schüler nach dem eben besprochenen Verfahren Grund- und Aufriss eines Langwürfels, dessen Kanten die Längen $1\frac{1}{2}$ Zoll, 2 Zoll und 3 Zoll haben, und nehme mit demselben eine Wendung im Aufriss und alsdann eine solche im Grundriss in ähnlicher Weise vor, wie dies in Fig. 50 und 51 geschehen ist.

Ebenso entwerfe man Grund- und Aufriss eines Würfels, dessen Kanten $1\frac{1}{2}$ Zoll lang sind, und nehme mit demselben gleichfalls zwei Wendungen in der eben besprochenen Weise vor.

Gerade Ecksäulen. Um eine gerade Ecksäule von drei-, fünf-, sechs- u. s. w. seitiger Basis in Grund- und Aufriss zu bringen, verfährt man im Wesentlichen ebenso wie beim Langwürfel, welcher eigentlich nichts anderes ist als eine gerade Ecksäule, die ein längliches Rechteck zur Basis hat. Man hat also zunächst die Ecksäule in einer solchen Stellung zu zeichnen, dass ihre Basis entweder der Grundfläche oder der Senkfläche parallel ist. 24

Als Beispiel wollen wir eine reguläre sechsseitige Säule von 15 Linien Höhe nehmen, deren Basis ein regelmässiges Sechseck von 8 Linien Seitenlänge ist. Zunächst wollen wir diese Basis horizontal gestellt denken, so erscheint sie im Grundriss in ihrer wahren Gestalt, also als ein reguläres Sechseck $abcdefg$, wie solches in Fig. 52 dargestellt ist. Im Aufriss erscheint diese Basis zur Linie verkürzt. Tab. XIII Fig. 52.

Bei der Stellung des Grundrisses Fig. 52 fallen im Aufriss die Punkte g und b in einen zusammen; ebenso die Punkte f und c .

Nun wird durch jeden der sechs Eckpunkte des Aufrisses eine Vertikale gezogen (deren Anzahl sich jedoch auf vier reducirt, weil ja die Punkte g und b sowie f und c in je einen zusammenfallen), und auf jeden derselben die Länge von 15" abgemessen, so erhält man die oberen sechs Eckpunkte $hiklno$ der Säule, deren jeder im Grundriss mit einem Punkte des Sechsecks $abcdefg$ zusammenfällt.

Der Aufriss der sechsseitigen Säule ist nun zunächst durch Wenden in die Stellung Fig. 53 gebracht und dazu der neue Grundriss gesucht; dann ist dieser neue Grundriss gewendet worden, Fig. 54, und der dazu gehörige Aufriss gesucht worden, der nun ein anschaulicheres Bild der sechsseitigen Säule giebt. Tab. XIII Fig. 53 u. 54.

In derselben Weise entwerfe und wende der Schüler Grund- und Aufriss einer regulären fünfseitigen Säule, deren Höhe 3 Zoll ist, während jede Fünfeckseite der Basis die Länge von 1 Zoll hat; ebenso handle man eine Säule von 3 Zoll Höhe, deren Basis ein regelmässiges Achteck von 9 Linien Seitenlänge ist.

Wenn die Axe einer geraden Ecksäule rechtwinkelig auf der Senkfläche steht, so erscheint ihre Basis im Aufriss unverkürzt, im Grundriss aber zur Linie verkürzt, wie dies Fig. 55, Tab. XIV erläutert, welche Grund- und Aufriss derselben sechsseitigen Säule, welche wir bereits in Fig. 52 betrachteten, aber in einer solchen Lage darstellt, bei welcher die Axe, also auch die Kanten der Säule rechtwinkelig auf der Senkfläche stehen. Tab. XIV Fig. 55.

Wird der Grundriss Fig. 55 um 90° gewendet, so erscheinen nun im entsprechenden Aufriss Fig. 56 die Säulenkanten auch in ihrer Vertikalprojection in ihrer wahren Länge, dagegen erscheinen die beiden sechsseitigen Endflächen der Säule jetzt im Grund- und Aufriss zur Linie verkürzt. Tab. XIV Fig. 56.

Zur Uebung handle man: 1. die reguläre fünfseitige und 2. die reguläre achtseitige Säule, deren Dimensionen oben angegeben wurden, und die zur Uebung schon mit vertikal stehender Axe gezeichnet wurden, ganz in gleicher Weise, wie es Fig. 55 und 56 mit der regulären sechsseitigen Säule geschehen ist.

Pyramiden. Wenn die Basis einer Pyramide (Spitzsäule) wagerecht steht, so erscheint sie im Grundriss in ihrer wahren Gestalt, welche man zunächst aufzutragen hat, im Aufriss aber erscheint sie zur Linie verkürzt. So stellt in Fig. 57, Tab. XIV $abcdefg$ Grund- und Aufriss der Basis einer regulären sechsseitigen Pyramide dar. Tab. XIV Fig. 57.

Bei regelmässigen Pyramiden ist nicht allein die Basis ein regelmässiges Vieleck, sondern

die Spitze derselben liegt auch auf der geraden Linie, welche, durch den Mittelpunkt der Basis gehend, rechtwinkelig auf deren Ebene steht. Liegt die Basis horizontal, so steht die Spitze der Pyramide senkrecht über ihrem Mittelpunkt m . Im Grundriss fällt alsdann die Spitze s der Pyramide mit dem Mittelpunkt m der Basis zusammen; im Aufriss aber liegt die Spitze s auf der durch m gezogenen Vertikalen. Ist nun die Höhe ms der Pyramide gegeben, so ist es leicht, die Zeichnung des Aufrisses zu vollenden. Im Grundriss erscheinen die Seitenkanten sa, sb, sc u. s. w. als gerade Linien, welche den Mittelpunkt des Vielecks mit seinen Eckpunkten verbinden.

Tab. XIV
Fig. 58 u. 59.

Mit der Pyramide Fig. 57 sind nun in Fig. 58 und in Fig. 59 in bekannter Weise Wendungen vorgenommen worden.

In gleicher Weise wie in Fig. 57 bis 59 eine reguläre sechsseitige Pyramide behandelt wurde, zeichne und wende man Grund- und Aufriss

- 1) einer regulären fünfseitigen Pyramide, deren Höhe 3 Zoll ist, während jede Seite der Basis eine Länge von 1 Zoll hat;
- 2) einer regulären achtseitigen Pyramide, deren Höhe 3" 5''' ist, während jede Seite ihrer Basis die Länge von 10 Linien hat.

Wenn die Basis einer regulären Pyramide wagerecht steht, so erscheinen die in der Spitze zusammenlaufenden Seitenflächen sab, sbc, scd, sde und sfg , Fig. 57, weder im Grundriss noch im Aufriss in ihrer wahren Gestalt, also auch die Kanten sa, sb, sc, sd und sf im Allgemeinen nicht in ihrer wahren Länge.

Die wahre Gestalt der Seitenflächen sowie die wahre Länge der Seitenkanten lässt sich aber nach §. 19 leicht ermitteln. Man bringe den Grundriss in eine solche Lage, dass eine der Grundkanten (etwa cd) rechtwinkelig auf der Grundlinie steht, im Aufriss also zur Linie verkürzt erscheint; es erscheint alsdann die Seitenfläche dcs im Aufriss zur Linie verkürzt. Wendet man das zur Linie verkürzte Dreieck dcs im Aufriss um die zum Punkt verkürzte Kante cd bis s nach einem Punkt s' gekommen ist, der mit c und d in gleicher Höhe liegt, so zeigt der entsprechende Grundriss dcs' die wahre Gestalt der Seitenfläche, ds' aber ist ebenso wie cs' die wahre Länge einer Seitenkante.

Zur Uebung ermittle man die wahre Gestalt der Seitenflächen und die wahre Länge der Seitenkanten der sechsseitigen Pyramide Fig. 57, sowie der fünfseitigen und achtseitigen Pyramiden, deren Bestimmungselemente bereits in diesem Paragraphen angegeben worden sind.

26 **Construction von Körpern, deren Netz gegeben ist.** Denkt man sich alle ebenen Figuren, welche einen Körper begränzen, in eine Ebene ausgebreitet, so nennt man die Gesamtheit dieser in eine Ebene ausgelegten Figuren das Netz des Körpers. Aus dem gegebenen Netz eines Körpers ist man im Stande, Grund- und Aufriss desselben zu construiren, wie durch folgende Beispiele erläutert werden soll.

I. Es soll Grund- und Aufriss eines Körpers construirt werden, welcher durch vier gleichseitige Dreiecke begränzt ist.

Tab. XV
Fig. 60. Zunächst denke man sich die vier gleichseitigen Dreiecke in die Ebene des Grundrisses ausgebreitet, wie dies in Fig. 60, Tab. XV geschehen ist. Das Dreieck abc , welches im Grundriss unverkürzt, im Aufriss aber zur Linie verkürzt erscheint, soll die Basis des zu construirenden Körpers bilden. An die Seite ab dieses Dreiecks ist nun das in der Ebene des

Grundrisses liegende gleichseitige Dreieck abd , an die Seite ca ist das Dreieck cag , an die Seite bc ist das Dreieck cbf angesetzt.

Alle diese Dreiecke erscheinen zunächst im Aufriss als Linie verkürzt.

Um aus diesen Dreiecken einen Körper zusammenzusetzen, muss das Dreieck abd um die Kante ab , das Dreieck cbf um die Kante cb , das Dreieck cag um die Kante ca gedreht werden, bis die Spitzen g , f und d in einem Punkte zusammentreffen. Ist dies der Fall, so fallen auch die Dreiecksseiten bd und bf so zusammen, dass sie eine Kante bilden; ebenso ad und ag , sowie auch cg und cf .

Der Punkt, in welchem die drei Dreiecksspitzen g , f und d zusammentreffen, ergibt sich in folgender Weise:

Wird das Dreieck abd um die Kante ab gedreht, so beschreibt der Punkt d einen Kreis, welcher im Grundriss zur Linie verkürzt erscheint. Würde das Dreieck um 180° gedreht, so würde offenbar der Punkt d auf den Punkt c zu liegen kommen, folglich ist die punktierte Gerade cd des Grundrisses die Horizontalprojection des Kreises, welchen der Punkt d bei der Drehung des Dreiecks abd um die Axe ab beschreibt.

Da nun die Umdrehungsaxe ab rechtwinkelig auf der Grundlinie steht, so erscheint der fragliche Kreis, welchen der Punkt d beschreibt, im Aufriss unverkürzt; es ist dies der Kreis $dd'd''$ des Aufrisses Fig. 60.

Wird das Dreieck cbf um die Axe cb gedreht, so beschreibt die Dreiecksspitze f einen Kreis, welcher im Grundriss gleichfalls zur geraden Linie af verkürzt erscheint.

Der von d beschriebene Kreis und der von f beschriebene schneiden sich nun in einem Punkte s , dessen Lage im Grundriss leicht zu ermitteln ist, denn es ist der Durchschnittspunkt der geraden Linien dc und fa .

Um den Punkt s im Aufriss zu finden, hat man nur durch s des Grundrisses eine Vertikale zu ziehen und diese bis zum Durchschnitt mit dem Kreise $dd'd''$ zu verlängern.

Dieser Punkt s ist der einzige, in welchem die Spitzen d und f der um die Kanten ab und cb gedrehten Dreiecke abd und cbf zusammenstossen können. Würden nun die Dreiecke abd und cbf in der That so weit gedreht, dass d sowohl wie f in dem Punkt s zusammentreffen, so hat nun das Dreieck abd die Lage abs , das Dreieck cbf aber hat die Lage cbs erhalten, die beiden Dreiecke stossen jetzt in der Kante bs zusammen.

In demselben Punkt s trifft aber auch die Spitze g des Dreiecks cag mit den Dreiecksspitzen d und f zusammen, wenn das Dreieck cag um die Axe ca gedreht wird. Das Dreieck cag stösst alsdann in der Kante sa mit dem aufgeklappten Dreieck bad , in der Kante cs mit dem aufgeklappten Dreieck cbf zusammen.

Die vier Dreiecke bilden also zusammen eine reguläre dreiseitige Pyramide, deren Basis cab , deren Spitze s ist. Nachdem die Lage der Spitze s im Grund- und Aufriss ermittelt ist, wird der Grundriss vollendet, wenn man von s die Linien sa , sb und sc zieht, den Aufriss aber indem man eine Linie von s nach c und eine von s nach b zieht, mit welcher letzterem Punkte im Aufriss auch a zusammenfällt.

Eine dreiseitige Pyramide wird, weil sie durch vier Flächen begrenzt ist, ein Tetraëder (Vierflächner) genannt. Der in Fig. 60 construirte Körper ist ein reguläres Tetraëder.

Im Aufriss Fig. 60 erscheinen zwei Flächen unseres Tetraëders zu Linien verkürzt, nämlich bas und bac . Die Fläche acs wird aber vollständig von der Fläche bcs gedeckt.

Tab. XV

In Fig. 61 ist nun zunächst der Aufriss der Fig. 60 gewendet und der zugehörige Fig. 61.

Tab. XV
Fig. 62.

Grundriss gesucht, sodann ist in Fig. 62 der Grundriss der Fig. 61 gewendet und der zu dem gewendeten Grundriss gehörige Aufriss construiert.

II. Grund- und Aufriss eines durch acht gleichseitige Dreiecke begränzten Körpers zu construiren.

Tab. XVI
Fig. 63.

Nachdem man im Grundriss Fig. 63 das Dreieck abc , welches zunächst als Basis des zu construierenden Körpers betrachtet werden soll, so aufgetragen hat, dass die Seite ba rechtwinkelig auf der Grundlinie steht, werden an die drei Seiten dieses Dreiecks die gleichseitigen Dreiecke abd , acg und cbf gerade ebenso angesetzt, wie es bei der Construction des Tetraäders geschehen ist. Ausserdem wird aber noch an jede Spitze des Dreiecks abc ein demselben gleiches Dreieck angesetzt und zwar so, dass die Seite mn parallel ist mit bc , kl parallel mit ba , hi parallel mit ca .

Das Dreieck bac erscheint im Aufriss zur horizontalen Linie verkürzt. Ebenso erscheint das Dreieck bad im Aufriss zur Linie verkürzt und zwar als wagerechte Linie, so lange es noch in der horizontalen Ebene des Dreiecks abc liegt.

Nun aber sollen sämtliche um abc herumliegende Dreiecke aufgeklappt werden, bis die Seiten von je zwei benachbarten Dreiecken zu einer Körperkante zusammenstossen.

Wird das Dreieck abd um die Kante ab aufgeklappt, so beschreibt die Spitze d einen Kreis, welcher, wie wir gesehen haben, im Grundriss zur Linie dc verkürzt ist, im Aufriss aber unverkürzt erscheint. Wird das Dreieck bhi um die Axe fd aufgeklappt, so beschreibt der Punkt i einen Kreis, welcher im Grundriss zur geraden Linie ia verkürzt erscheint, denn wenn die Drehung bis 180° fortgesetzt würde, so käme der Punkt i auf den Punkt a zu liegen.

Der Kreis, welchen der Punkt d bei einer Drehung des Dreiecks abd um die Axe ab beschreibt, schneidet den Kreis, welchen der Punkt i bei der Drehung des Dreiecks bhi um die Axe fd beschreibt in einem Punkte o , welcher auf dem Durchschnitt der Linien cd und ai liegt. Nur in diesem Punkte können die Punkte d und i zusammenstossen und es bilden alsdann die Dreiecksseiten bd und bi zusammen eine Kante bo des zu construierenden Körpers.

Sind also die Dreiecke abd und bhi so weit aufgeklappt, dass i und d in o zusammen treffen, so hat nun das Dreieck abd die Lage abo erhalten, das Dreieck bhi aber die Lage bop , wenn p der Durchschnittspunkt der Geraden ch und einer durch o parallel mit hi gezogenen Linie ist, denn bei einer Drehung des Dreiecks bhi um die Axe fd beschreibt h einen im Grundriss zur Linie hc verkürzten Kreis, die Dreiecksseite hi aber bleibt bei dieser ganzen Drehung stets ihrer ursprünglichen Lage parallel.

Hat man die Punkte o und p im Grundriss ermittelt, so ist es leicht, sie in Aufriss zu bringen. Man ziehe zunächst durch o des Grundrisses eine Senkrechte bis zur Durchschneidung des im Aufriss um b mit dem Radius bd beschriebenen Kreises und erhält so den Punkt o im Aufriss. Der Punkt p liegt aber im Aufriss vertikal über dem p des Grundrisses und in gleicher Höhe mit dem eben bestimmten Punkt o des Aufrisses.

Somit sind nun die Dreiecke bao und bpo in Aufriss gebracht.

Zunächst ist nun das Dreieck cbf aufzuklappen, bis der Punkt f mit p zusammenfällt. Um alsdann das Dreieck bcp im Aufriss zu vollenden, hat man in demselben nur die Linie cp zu ziehen.

Wird das Dreieck ckl um die Kante fg aufgeklappt, bis der Eckpunkt k nach p gekommen ist, so ist l nach r gelangt. Das Dreieck cpr erscheint im Aufriss zur Linie verkürzt, weil r in gleicher Höhe mit p gerade hinter diesem Punkte liegt.

Bei der Aufklappung des Dreiecks cag um ca kommt nun g an die Stelle des Punktes r . Das Dreieck car liegt im Aufriss gerade hinter dem Dreieck cbp .

Es bleibt jetzt nur noch das Dreieck amn so aufzuklappen, dass das Eck m nach r und n nach o kommt. Das Dreieck aro erscheint im Aufriss vollständig durch das Dreieck bpo gedeckt.

Den Schluss unseres Körpers bildet das Dreieck por , welches im Grundriss unverkürzt, im Aufriss zur Linie verkürzt erscheint.

Ein von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzter Körper, wie ein solcher in Fig. 63 im Grund- und Aufriss gebracht ist, wird ein reguläres Octaëder (Achtflächner) genannt.

Mit dem Octaëder Fig. 63 sind nun in Fig. 64 und in Fig. 65 ähnliche Wendungen vor- Tab. XVI
genommen worden, wie dies in Fig. 61 und Fig. 62 mit dem Tetraëder geschehen ist. Fig. 64 u. 65.

III. Aus regulären Sechsecken und Quadraten einen Körper zusammenzusetzen.

Ein regelmässiges Sechseck $abcdefg$, Fig. 66, Tab. XVII, sei parallel mit der Grundfläche Tab. XVII
so gestellt, dass eine Seite desselben ab (also auch fd) rechtwinkelig zur Senkfläche steht, Fig. 66.
so erscheint es im Grundriss unverkürzt, im Aufriss zur Linie verkürzt.

Im Grundriss ist nun an die Seite ab des Sechsecks das mit 1 bezeichnete Quadrat an-
gesetzt, welches, in der Ebene des Sechsecks $abcdefg$ liegend, im Grundriss gleichfalls un-
verkürzt erscheint. In gleicher Weise ist an die Seite cd das Quadrat 2, an die Seite fg das
Quadrat 3 angesetzt.

Ebenso ist das regelmässige Sechseck 4 an die Sechsecksseite bc , das Sechseck 5 an df ,
das Sechseck 6 an die Seite ga angesetzt.

Wird das Quadrat 1 und das Sechseck 4 aufgeklappt, bis die Kanten bx und by zusam-
menstossen, so treffen die Ecken x und y in einem Punkt h zusammen, der wie sich leicht
übersehen lässt, im Grundriss auf dem Durchschnitt der Linien bx und ya sich befinden
muss. Den Aufriss des Punktes h findet man, wenn man durch den Punkt h des Grundrisses
eine Vertikale zieht und diese bis zum Durchschnitt mit dem Kreise verlängert, welchen man
im Aufriss um den Punkt b als Mittelpunkt mit dem Radius bx gezogen hat.

In der erwähnten Weise aufgeklappt, kommt das Quadrat 1 in die Lage $abh i$. Den
Punkt i findet man, wenn man durch h eine Linie parallel mit ba bis zu der bx gegenüber-
liegenden Quadratseite zieht. Im Aufriss liegt der Punkt i gerade hinter h .

Ist das Sechseck 4 so weit aufgeklappt, dass die Seite by in die Lage bh gekommen ist,
so hat nun das Sechseck die Lage $cbhklm$. Der Punkt m ergibt sich im Grundriss am
sichersten als der Durchschnittspunkt der Linien dz und vc .

Um den Punkt k im Grundriss zu finden, zieht man durch h eine Linie parallel mit cm
bis zum Durchschnitt mit bw ; um l zu finden, zieht man durch m eine Gerade parallel mit
 bh bis zum Durchschnitt mit cu .

Im Aufriss ergeben sich diese Punkte folgendermaassen. m des Aufrisses liegt auf der
durch m des Grundrisses gezogenen Vertikalen in gleicher Höhe mit h des Aufrisses.

Um l im Aufriss zu finden, zieht man eine Vertikale durch l des Grundrisses, und durch
 m des Aufrisses eine Linie parallel mit bh .

Der Punkt k des Aufrisses ist der Durchschnittspunkt einer durch k des Grundrisses ge-
zogenen Vertikalen und einer Linie, welche durch h des Aufrisses parallel mit cm ge-
zogen ist.

Wird das Quadrat 2 aufgeklappt, bis seine Seite vc mit der benachbarten Seite des Sechsecks 4 zusammenstösst, so kommt es in die Lage $dcmn$. Der Punkt n ergibt sich im Grundriss, wenn man durch m eine Linie parallel mit cd bis zur Durchschneidung mit der cv gegenüber liegenden Quadratseite zieht.

Im Aufriss liegt n vertikal über dem n des Grundrisses und in gleicher Höhe mit m .

Wird das Sechseck 5 aufgeklappt, bis es mit dem aufgeklappten Quadrat 2 in einer Kante zusammenstösst, so kommt es in die Lage $fdnopq$. Wie die Punkte o , p und q im Grundriss gefunden werden, bedarf wohl jetzt keiner Erläuterung mehr. Im Aufriss liegt q gerade hinter n . Die Punkte o und p liegen im Aufriss vertikal über den entsprechenden Punkten des Grundrisses und in gleicher Höhe mit l und k .

Da op im Grundriss zur Grundlinie rechtwinkelig steht, so fallen die Punkte o und p in einen zusammen. Wenn richtig gezeichnet worden ist, so müssen die Punkte o , n und d im Aufriss in einer geraden Linie liegen, denn das Sechseck $fdnopq$ erscheint im Aufriss zur Linie verkürzt.

Wird das Quadrat 3 bis zur Berührung mit den benachbarten Sechsecken aufgeklappt, so kommt es in die Lage $fgrq$. Im Aufriss wird das Quadrat $fgrq$ vollständig durch das Quadrat $dcmn$ gedeckt, so dass q hinter n , r hinter m , g hinter c und f hinter d liegt.

Das aufgeklappte Sechseck 6 kommt in die Lage $gaitsr$. Im Aufriss ist es vollständig durch das vorn liegende Sechseck $cbhklm$ gedeckt.

So haben wir denn nun vier Sechsecke und drei Quadrate zusammengefügt; diese sieben ebenen Flächen bilden aber durchaus noch keinen geschlossenen Körper, sondern gewissermaassen ein nach oben offenes Körbchen, welches erst durch Hinzufügung weiterer Sechsecke und Quadrate zu einem geschlossenen Körper vollendet werden muss.

Diese Ergänzung wollen wir aber nicht in der Fig. 66 selbst vornehmen, weil sonst die Figur allzu sehr überladen und die Constructionen verwischt werden möchten, durch welche man zum Grund- und Aufriss der Figur gekommen ist. Deshalb sind nun zunächst Grund- und Aufriss der in Fig. 66 zusammengeführten Quadrate und Sechsecke ohne Constructionslinien nach Fig. 67 übertragen und hier ist dann die Ergänzung des Körpers vorgenommen worden.

Zwischen den Kanten on , nm und ml lässt sich ein den bisher betrachteten gleiches Sechseck einsetzen, welches man zunächst im Aufriss erhält, wenn man la parallel und gleich on , ob parallel und gleich ml macht und dann die Punkte b und a durch eine gerade Linie verbindet.

Nachdem dieses Sechseck im Aufriss ausgezogen worden ist, kann man es leicht in Grundriss bringen, wo der Punkt b mit d , a aber mit c zusammenfällt und zwar so, dass b über d , a über c liegt.

Um eine Ueberladung von Buchstaben zu vermeiden, ist von den Eckbuchstaben a , b , c , d , f und g des unteren Sechsecks in Fig. 66 nur einer, nämlich d in Fig. 67 eingetragen. Wohin sie gehören ist aus Fig. 66 leicht zu ersehen.

In gleicher Weise lässt sich zwischen die Kanten pq , qr und rs ein reguläres Sechseck einsetzen, welches aber vollständig vom Sechseck $onmlab$ gedeckt wird, so dass die beiden oberen Eckpunkte dieses Sechsecks, g und h , gerade hinter b und a fallen.

Im Grundriss fallen die Punkte h und f mit g und g zusammen. Um das Sechseck $qp h g sr$ im Grundriss zu vollenden, hat man nur noch die Linien gs und hp zu ziehen.

Ein weiteres Sechseck $khiti\bar{b}$ lässt sich zwischen die Kanten kh , hi und it einfügen. Die Punkte i und $\bar{b}$ fallen im Grundriss mit b und a zusammen. Um dieses Sechseck im Grundriss zu vollenden, hat man nur noch die Linien ik und $\bar{b}t$ zu ziehen.

Im Aufriss erscheint das Sechseck $khiti\bar{b}$ zur Linie verkürzt.

Zwischen die Kanten al , lk und ki passt das Quadrat $alki$, zu dessen Vollendung nur noch die Linie ai zu ziehen ist.

In gleicher Weise passt das Quadrat $bts\bar{g}$ zwischen die Kanten bt , st und sg . Im Aufriss ist es vollständig durch das Quadrat $alki$ gedeckt.

Endlich passt ein Quadrat $pob\bar{h}$ zwischen die Kanten hp , po und ob . Im Aufriss erscheint dies Quadrat zur Linie verkürzt.

Oben wird der ganze Körper durch das reguläre Sechseck $baib\bar{g}h$ geschlossen, welches im Grundriss in seiner wahren Gestalt, im Aufriss aber zur Linie verkürzt erscheint.

Der ganze Körper ist begränzt von vierzehn Flächen, nämlich von acht Sechsecken und von sechs Quadraten.

Zur Uebung ist der auf Tab. XVII construirte Körper durch zweimaliges Wenden in eine übersichtlichere Stellung zu bringen. Als weitere Uebungsaufgaben mögen folgende dienen:

IV. Einen durch acht gleichseitige Dreiecke und sechs Quadrate begränzten Körper zu construiren.

Zunächst bringe man ein gleichseitiges Dreieck im Grundriss in gleiche Stellung wie das Dreieck abc Fig. 63, Tab. XVI.

An jede Seite dieses Dreiecks setze man sodann ein Quadrat an, dessen Seiten gleich sind den Seiten des zuerst aufgetragenen Dreiecks.

An jede Spitze des zuerst aufgetragenen Dreiecks setze man oben ein ihm gleiches Dreieck in gleicher Weise an wie dieses auch in Fig. 63 geschehen ist.

Darauf klappe man die an das zuerst aufgetragene Dreieck angesetzten Quadrate und Dreiecke auf, bis die benachbarten Seiten derselben zu einer Kante zusammenstossen, und vollende den ganzen Körper in ähnlicher Weise wie der Körper Fig. 66 vollendet wurde.

V. Einen durch zwölf regelmässige Fünfecke begränzten Körper zu construiren.

Durchschneidung von Ebenen und ebenflächig begränzten Körpern. Wenn 27 ein Körper, welcher durch lauter ebene Flächen begränzt ist, von einer ebenen Fläche durchschnitten wird, so ist die Durchschnichtsfigur jedenfalls eine ebene, durch gerade Linien begränzte. Die Eckpunkte dieser Durchschnichtsfigur sind diejenigen Punkte, in welchen die Kanten des Körpers mit der schneidenden Ebene zusammentreffen. Um diese Punkte zu finden, stelle man den Körper sammt der schneidenden Ebene so, dass die schneidende Ebene im Aufriss zur Linie verkürzt erscheint.

So stellt z. B. Fig. 68, Tab. XVIII Grund- und Aufriss einer unregelmässig fünfseitigen Pyramide dar, welche von einer Ebene durchschnitten wird, die im Aufriss zur Linie AB Fig. 68. verkürzt erscheint.

Im Aufriss ist nun leicht die Lage der Punkte anzugeben, in welchen die Kanten der Pyramide von der Ebene AB durchschnitten werden. Die Kante sa wird von der fraglichen Ebene in k , sb wird in i , sc wird in h , sd wird in g und sf endlich wird in l geschnitten.

Hat man einmal die Durchschnittpunkte k , i , h , g und l im Aufriss gefunden, so hat es

keine Schwierigkeit, ihre Lage auch im Grundriss anzugeben. Man ziehe nur durch k des Aufrisses eine Vertikale herab bis dieselbe die Kante as des Grundrisses schneidet, so ergibt sich der Punkt k des Grundrisses. Der Punkt g des Grundrisses liegt auf der Durchschneidung der durch g des Aufrisses gezogenen Vertikalen und der Linie sd des Grundrisses.

In gleicher Weise wird auch die Lage der Punkte i , h und l im Grundriss ermittelt.

Verbindet man im Grundriss die Punkte k und i , i und h , h und g , g und l , l und k durch gerade Linien, so erhält man den Grundriss der Durchschnitsfigur.

Diese Durchschnitsfigur erscheint nun aber im Grundriss der Fig. 68 noch nicht in ihrer wahren Gestalt, da ihre Ebene nicht der Grundfläche parallel liegt.

Um die wahre Gestalt der Durchschnitsfigur zu erhalten, wende man im Aufriss die Linie gk , zu welcher die Figur verkürzt erscheint, so dass sie mit der Grundlinie parallel liegt, wie dies in Fig. 69 ausgeführt ist, und übertrage auf diese Linien die Punkte l , h und i in derselben gegenseitigen Lage, welche sie in Fig. 68 haben, d. h. man mache ki im Aufriss der Fig. 69 gleich ki im Aufriss der Fig. 68, kh im Aufriss der Fig. 69 gleich kh im Aufriss der Fig. 68 u. s. w.

Construirt man dann zu diesem horizontal gelegten Aufriss der Durchschnitsfigur nach den bekannten Regeln den Grundriss, wie dies in Fig. 69 wirklich ausgeführt ist, so giebt dieser Grundriss die wahre Gestalt der Durchschnitsfigur.

Ein anderes Verfahren, die wahre Gestalt der Durchschnitsfigur zu finden, ist folgendes:

Nachdem man, wie es in Fig. 70 gleichfalls an einer unregelmässigen fünfseitigen Pyramide ausgeführt worden ist, die Durchschnitsfigur $ghikl$ in Grund- und Aufriss ganz nach demselben Verfahren wie bei Fig. 68 erhalten hat, ziehe man durch den Punkt i im Grundriss, welcher der am meisten rechts liegende der Durchschnitsfigur $ghikl$ ist (oder auch durch den am meisten links liegenden Eckpunkt g) eine Linie parallel mit der Grundlinie und fälle auf dieselbe Perpendikel von den übrigen Eckpunkten des Fünfecks, also von h , von g , von l und von k , deren Fusspunkte wir mit h' , g' , l' und k' bezeichnen wollen. Im Aufriss fällt k' mit k , l' mit l , g' mit g und h' mit h zusammen.

Zieht man nun im Aufriss durch die Punkte k , h , l und g Linien, welche rechtwinkelig auf ig stehen und macht man alsdann $k\bar{k}$ im Aufriss gleich $k'k$ im Grundriss, ll im Aufriss gleich der Länge ll' des Grundrisses, gg und hh im Aufriss gleich gg' und hh' im Grundriss und verbindet man endlich g und h , g und l , l und $\bar{k}$, $\bar{k}$ und i , i und h durch gerade Linien, so ist, wie sich leicht nachweisen lässt, $ghi\bar{k}l$ die wahre Gestalt der Durchschnitsfigur.

In Fig. 71 ist der Durchschnitt einer regelmässigen sechsseitigen Pyramide mit einer Ebene construirt, welche im Aufriss zur Linie AB verkürzt erscheint, und dann nach dem ebenbesprochenen Verfahren die wahre Gestalt $gmikih$ der Durchschnitsfigur ermittelt worden.

Die zu Anfang dieses Paragraphen besprochene Methode, den Durchschnitt einer Ebene mit einer Pyramidenkante zu finden, hört auf brauchbar zu sein, wenn diese Kante im Grund- und Aufriss rechtwinkelig auf der Grundlinie steht, wie dies mit der Kante sa der dreiseitigen Pyramide $abcs$, Fig. 72, der Fall ist, weil ein vom Durchschnittspunkt i im Aufriss auf die Grundlinie gefälltes und in den Grundriss hinein verlängertes Perpendikel die Kante sa im Grundriss nicht schneidet, sondern mit ihr zusammenfällt. Um unter diesen Umständen den Punkt zu ermitteln, in welchem die Kante sa durch die Ebene AB geschnitten wird, drehe man die Linie sa im Grundriss um 90° , so dass sie in die Lage sa' kommt, also mit der Grundlinie parallel läuft. Nachdem man den Punkt a' in den Aufriss gebracht und die

Linie sa' im Aufriss gezogen hat, zieht man durch i im Aufriss eine horizontale Linie, welche sa' in i' schneidet. Fällt man von i' des Aufrisses ein Perpendikel bis auf sa' des Grundrisses, so findet man den Punkt i' im Grundriss und man hat nun si im Grundriss gleich si' des Grundrisses zu machen, um die Lage des Durchschnittspunktes i auch im Grundriss zu erhalten.

Dieses Verfahren ist auch in Anwendung zu bringen, wenn die durchschnittene Kante im Grund- und Aufriss nicht ganz, aber doch nahezu rechtwinkelig auf der Grundlinie steht.

In Fig. 73 ist die Durchschneidung einer schiefen quadratischen Säule mit einer Ebene AB construiert. Eine weitere Erläuterung dieser Figur ist wohl nach dem Vorhergehenden nicht mehr nöthig. Tab. XVIII
Fig. 73.

Gegenseitige Durchdringung ebenflächig begränzter Körper. Wenn zwei Körper, von denen jeder durch ebene Flächen begränzt ist, sich gegenseitig durchschneiden, so kann man die Durchschneidungslinie des einen Körpers mit jeder Fläche des andern nach den im vorigen Paragraphen besprochenen Principien construiren. In den meisten Fällen dürfte aber die Durchführung dieses Verfahrens sehr weitläufig werden. 28

Folgendes Verfahren führt dagegen auf weit einfachere Weise zum Ziel.

Man denke sich beide Körper von Ebenen durchschnitten, welche im Grundriss oder im Aufriss zur Linie verkürzt erscheinen. Eine solche Ebene schneidet im Allgemeinen jeden der beiden Körper in einer geradlinig begränzten Figur. Diejenigen Punkte, in welchen sich die beiden Durchschnittsfiguren einer und derselben Schnittfläche schneiden, sind jedenfalls Punkte einer der gesuchten Durchschneidungslinie.

Die folgenden Beispiele sollen die Anwendung dieses Principis erläutern.

In Fig. 74 soll die Durchschneidung einer vertikalen quadratischen Säule mit einer horizontalen quadratischen Säule construiert werden. Die beiden quadratischen Säulen, von denen die vertikale einen grösseren Querschnitt haben mag, als die horizontale, sollen so gegen einander gestellt sein, dass die Kanten ab und cd , fg und hi in eine und dieselbe vertikale Ebene fallen, die wir als mit der Senkfläche parallel annehmen wollen. Tab. XIX
Fig. 74.

Denken wir uns eine horizontale Fläche durch die Kanten pr und qs des horizontalen Prismas gelegt, so schneidet diese Ebene das horizontale Prisma in dem länglichen Rechteck $prsq$, während der Durchschnitt dieser Ebene mit der vertikalen Säule ein Quadrat ist, welches im Grundriss mit dem Quadrat $alcm$ zusammenfällt.

Die Durchschnittspunkte des länglichen Rechtecks $prsq$ mit dem fraglichen Quadrat sind im Grundriss leicht zu bezeichnen, es sind die Punkte a b c d .

Um die Lage dieser Punkte im Aufriss zu finden, hat man nur durch a und b des Grundrisses einerseits und durch b und c andererseits Vertikale zu ziehen, und diese bis zur Durchschneidung mit der horizontalen Linie pr im Aufriss zu verlängern.

Die Punkte a und b sind diejenigen, in welchen die Kante pr die Flächen $abln$ und $lndc$ trifft. Die Flächen $abom$ und $cdom$ werden von der Kante qs in den Punkten b und c getroffen, welche im Aufriss gerade hinter a und b liegen.

Ohne Schwierigkeit übersieht man nun weiter, dass g der Durchschnittspunkt der Kanten fg und ab ist, woraus dann weiter folgt, dass ga die Linie ist, in welcher sich die Flächen $fprg$ und $abnl$ schneiden.

Ebenso ergibt sich ah als die Durchschnittslinie der Ebenen $abnl$ und $phir$.

Ferner sind gd und hd (im Aufriss von ga und ha gedeckt) die Durchschnittslinien der Fläche $abom$ mit $fqsq$ und mit $hqsi$.

Auf der linken Seite schneiden sich also die beiden quadratischen Säulen in einer vierseitigen Figur $gahd$, deren vier Seiten aber nicht in einer Ebene liegen.

Ganz auf dieselbe Weise wie wir die Durchschneidung des horizontalen Prismas mit den beiden links liegenden Flächen der quadratischen Säule construirt haben wird auch der Durchschnitt des horizontalen Prismas mit den Flächen $lndc$ und $cdom$ des vertikalen gefunden.

Um die Durchschnittenfiguren $gahd$ und $fbnc$ des eben besprochenen horizontalen und vertikalen Prismas besser zu übersehen, nehme man mit der Fig. 74 erst eine Wendung im Aufriss und dann eine solche im Grundriss in ähnlicher Weise vor, wie es auf Tab. XIII in Fig. 53 und 54 mit der sechsseitigen Säule Fig. 52 geschehen ist.

Tab. XIX
Fig. 75.

Ein etwas complicirteres Beispiel ist in Fig. 75 durchgeführt. Eine horizontale vierseitige Säule ist durch eine etwas dickere Vertikale gleichsam durchgesteckt, allein die gegenseitige Lage der beiden vierseitigen Prismen ist nicht so symmetrisch, wie es im vorigen Beispiele der Fall war.

Die Punkte g , a und h , in welchen die Kanten fg , pr und hi des horizontalen Prismas die Fläche $abnl$ treffen, werden ganz ebenso ermittelt, wie der Punkt a in Fig. 74, und man hat nur die geraden Linien ga und ha zu ziehen, um die Durchschnittslinien der Flächen $fprg$ und $hpri$ mit $abnl$ zu erhalten.

Der Durchschnittspunkt b der Kante qs mit der hinteren Fläche $abom$ wird auf dieselbe Weise gefunden; um aber die Linie ziehen zu können, in welcher sich die Flächen $abom$ und $fqsq$ einander schneiden, muss man noch einen zweiten Punkt dieser Durchschnittslinie ermitteln. Zu diesem Zweck denken wir uns durch einen Punkt t der Kante fq , welcher im Grundriss etwas weiter von fg absteht als a eine horizontale Ebene gelegt, so schneidet diese horizontale Ebene das horizontale Prisma in einem länglichen Rechteck $tvxu$, dessen Construction, wenn man einmal die Lage von t gewählt hat, keine Schwierigkeit mehr bietet.

Um die Lage dieser schneidenden Ebene im Aufriss zu erhalten, denke man sich im Grundriss die zur Linie verkürzte Endfläche $fphq$ des horizontalen Prismas um die zum Punkt verkürzte Diagonale fh gedreht, bis sie parallel mit der Bildfläche steht; q kommt dann im Grundriss nach q' , t nach t' . Der Punkt q' wird nun in Aufriss gebracht, die Linie $q'f$ gezogen und dann durch t' des Grundrisses einer Vertikale gelegt, und bis zur Durchschneidung mit fq' des Aufrisses verlängert. Eine durch t' des Aufrisses gezogene horizontale Linie ist die zur Linie verkürzte, durch den Punkt t gelegte horizontale Ebene.

Dieselbe Ebene schneidet die vertikale Säule in einem Quadrat, welches im Grundriss gerade durch $alcm$ gedeckt wird.

Dieses Quadrat und das längliche Rechteck $tvxu$ schneiden sich in vier Punkten, von welchen wir einen mit f bezeichnet haben. Dieser Punkt f , welcher leicht in den Aufriss gebracht wird, ist ein zweiter Punkt der Linie, in welcher sich die Flächen $fqsq$ und $abom$ schneiden. Man erhält diese Durchschnittslinie im Aufriss, wenn man von b über f eine Linie bis zur Kante ab zieht.

Der Punkt n , in welchem die von b über f gezogene Linie mit ab zusammentrifft, ist derjenige, in welchem die Kante ab von der Fläche $fqsq$ geschnitten wird.

Eine von n nach g gezogene Linie ist die Durchschnittslinie der Flächen $abnl$ und $fqsq$. Nach diesen Besprechungen bedarf wohl die Vollendung der Figur keiner weiteren Erläuterung.

Mit der vollendeten Fig. 75 sind dieselben Wendungen vorzunehmen, wie mit Fig. 74.

Als drittes Beispiel soll die Durchschneidung einer aufrecht stehenden regulären vierseitigen Pyramide, Fig. 76, mit einer horizontalen quadratischen Säule construiert werden.

Tab. XIX
Fig. 76.

Die Bestimmung der Punkte a , b , c und d , in welchen die Kanten as und cs von fg und hi geschnitten werden, hat keine Schwierigkeit.

Eine durch die Kanten pr und qt gelegte horizontale Ebene, welche im Aufriss zur Linie verkürzt erscheint, schneidet die Pyramide in einem Quadrat $uvxy$, welches im Grundriss unverkürzt erscheint. Dieses Quadrat wird im Grundriss in vier Punkten h, f, z, v von dem länglichen Rechteck $qprt$ geschnitten. Die Punkte h und f sind diejenigen, in welchen die Kante pr von den Pyramidenflächen abs und bcs geschnitten wird, während z und v die Punkte sind, in welchen die Kante qt mit den Pyramidenflächen ads und cds zusammentrifft.

Nachdem man die Punkte h und f in Aufriss gebracht hat, zieht man die Linien ah und bf , welche diejenigen sind, in denen die Pyramidenflächen abs und bcs von der Säulenfläche $bfgr$ geschnitten werden.

Ebenso sind hc und df die Durchschnittslinien der Pyramidenflächen abs und bcs mit der Säulenfläche $phir$.

Im Aufriss liegt v gerade hinter h , z liegt hinter f .

Auch mit dieser Figur sind die gleichen Wendungen vorzunehmen, wie mit der vorhergehenden.

In Fig. 77 ist der Durchschnitt zweier schiefer Säulen von quadratischer Basis construiert.

Tab. XIX
Fig. 77.

Nachdem die Punkte a und b bestimmt sind, in welchen die Kante af der dickeren Säule von den Kanten mq und ko geschnitten wird, denke man sich etwas oberhalb b eine horizontale Ebene gelegt; diese horizontale, im Aufriss zur Linie AB verkürzte Ebene schneidet das eine Prisma in dem Quadrate $k'l'm'n'$, die andere im Quadrate $f'g'h'i'$. Diese beiden Quadrate, welche im Grundriss unverkürzt erscheinen, schneiden sich in den Punkten b und g . Zieht man durch b und g des Grundrisses eine Vertikale bis zum Durchschnitt mit AB im Aufriss, so erhält man die Punkte b und g auch im Aufriss.

Von a wird nun eine Linie über b gezogen und zwar bis zur Durchschneidung mit der Kante lp . In dieser Linie ac schneiden sich die Flächen $afgb$ und $lpqm$.

Eine von b nach c gezogene Gerade ist die Durchschnittslinie der Flächen $afgb$ und $lpok$.

Die Durchschnittslinien auf der anderen Seite des dickeren Prismas werden ganz auf dieselbe Weise gefunden.

Gerade bei dieser Figur ist es nöthig, dass der Schüler alle Constructionen in grösserem Maassstabe ausführt, damit die Details der Construction sich nicht verwirren.

Nach Vollendung der Fig. 77 in grösserem Maassstab sind auch mit ihr die entsprechenden Wendungen vorzunehmen.

Wenn es sich um die Durchschneidung eines geraden horizontalen Prismas mit irgend

einem anderen Körper handelt, ist es vortheilhaft eine solche Stellung zu wählen, dass die Axe des Prismas rechtwinkelig zur Senkfläche steht.

Tab. XX
Fig. 78.

Es ist dies bei Fig. 78 in Anwendung gebracht worden, welche die Durchschneidung einer regulären sechsseitigen Pyramide mit einem horizontalen vierseitigen Prisma darstellt.

Die Punkte a und b , c und d , e und f , i und k , g und h , in welchen die Kanten der Pyramide durch die Flächen des Prismas geschnitten werden, ergeben sich im Aufriss ohne Weiteres, weil die Flächen des Prismas hier zu Linien verkürzt sind; nachdem man sie im Aufriss bezeichnet hat, sind sie aber auch leicht in Grundriss zu bringen.

Um die Durchschnittspunkte der Pyramidenflächen mit den Prismenkanten zu finden, denken wir uns durch letztere horizontale Ebenen gelegt, welche die Pyramide in regulären Sechsecken schneiden. Die gesuchten Durchschnittspunkte liegen da, wo eine Pyramidenkante mit den Seiten des entsprechenden Sechsecks zusammentrifft.

Eine durch die oberste Kante des Prismas gelegte horizontale Ebene AB schneidet die Pyramide in einem Sechseck, welches im Grundriss durch punktirt Linien vollständig ausgezeichnet wird. Die vordere und die hintere Sechsecksseite werden von der obersten Kante des Prismas in den Punkten n und o geschnitten, und das sind auch die Punkte, in welchen die oberste Prismenkante von der vorderen und hinteren Pyramidenfläche geschnitten wird.

Nach derselben Methode sind auch die Punkte p und q , r und s gefunden, nur sind in unserer Figur nur diejenigen Seiten der Durchschnittssechsecke punktirt gezogen, welche von der entsprechenden Prismenkante durchschnitten werden.

Nachdem die genannten Durchschnittspunkte ermittelt sind, hat das Ausziehen der Durchschnittsfigur im Grundriss keine Schwierigkeit mehr.

Um die Durchschnittsfigur auch im Aufriss anschaulicher zu machen, nehme man mit Fig. 78 ähnliche Wendungen vor, wie mit Fig. 77 u. 76.

- 29 **Das Zeichnen von Krystallen.** Die Krystalle bieten uns ausgezeichnete Beispiele zum Zeichnen ebenflächig begränzter Körper, von denen wir einige näher besprechen wollen, ohne uns jedoch weiter auf eine detaillirtere Besprechung krystallographischer Gesetze einzulassen.

Die einzelnen Flächen der Krystalle werden durch ihre Lage gegen bestimmte, als Axen bezeichnete Richtungen charakterisirt.

Bei drei Krystallsystemen sind es drei Axen, von denen jede auf der Ebene der beiden anderen rechtwinkelig steht, auf welche man die einzelnen Krystallflächen bezieht.

Bei dem regulären Krystallsystem sind die drei Axen an Grösse gleich; beim quadratischen System weicht die Grösse einer Axe von der Grösse der beiden anderen, einander gleichen, ab, bei dem rhombischen System endlich ist keine der drei Axen der andern gleich.

Betrachten wir zunächst einige Krystalle des regulären Systems.

Tab. XX
Fig. 79.

In Fig. 79, Tab. XX sei m der Mittelpunkt des Axenkreuzes. Durch diesen Mittelpunkt sind zunächst zwei horizontale, zu einander rechtwinkelige Axen gelegt, welche im Grundriss unverkürzt erscheinen und von denen die eine YY parallel mit der Grundlinie, die andere ZZ rechtwinkelig auf derselben steht.

Im Aufriss erscheint die eine dieser Axen, nämlich YY , unverkürzt, die andere ZZ

aber erscheint zum Punkt verkürzt und es sind deshalb auch im Aufriss die Buchstaben *ZZ* ganz weggelassen.

Die dritte Axe, die vertikale Axe *XX* erscheint im Grundriss zum Punkt verkürzt, die Buchstaben *XX* sind deshalb auch im Grundriss weggelassen, weil sie mit den Buchstaben anderer später zu besprechender auf dieser Axe liegenden Punkte zusammenfallen müssten.

Auf jeder dieser drei Axen ist nun nach beiden Seiten von *m* aus die gleiche Grösse abgemessen, so also dass die Punkte *a* und *b*, *c* und *d*, *f* und *g* gleich weit von *m*, dem Mittelpunkt des Axenkreuzes, abstehen.

Denken wir uns nun im Grundriss Linien gezogen von *c* nach *f*, von *f* nach *d*, von *d* nach *g* und von *g* nach *c*, so bilden diese ein Quadrat, die Basis einer quadratischen Pyramide, welche entsteht, wenn man vom Punkte *a* aus Linien nach den vier Ecken des fraglichen Quadrats zieht.

Die vier Seitenflächen dieser quadratischen Pyramide sind *cfa*, *fda*, *dga* und *gca*.

In gleicher Weise aber bildet *b* die nach Unten gekehrte Spitze einer quadratischen Pyramide, welche, der ersten ganz gleich, mit ihr die quadratische Basis *cf dg* gemeinschaftlich hat. Die vier Seitenflächen dieser nach Unten gekehrten Pyramide sind *cfb*, *fdb*, *dgb* und *gcb*.

Diese beiden quadratischen Pyramiden bilden zusammen einen von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzten Körper, welcher mit dem Namen des regulären Octaëders bezeichnet und welcher als die Grundform des regulären Krystallsystems betrachtet wird.

Durch zweimaliges Wenden in Fig. 80, Tab. XX, und Fig. 81, Tab. XXI, ist das reguläre Octaëder in eine mehr übersichtliche Stellung gebracht worden. Tab. XX
Fig. 80.

Die Stellung im Aufriss der Fig. 81 ist ohngefähr diejenige, in welcher das reguläre Octaëder in krystallographischen Werken gewöhnlich dargestellt wird. Tab. XXI
Fig. 81.

Das reguläre Octaëder ist derselbe Körper, welchen wir auf Tab. XVI aus seinem Netze zusammensetzten.

Gehen wir zur Construction eines zweiten, zum regulären System gehörigen Krystallkörpers, des Rhomben-Dodekaëders über.

Zur Construction des Rhomben-Dodekaëders gehen wir von demselben Axenkreuz aus, welches uns zur Construction des regulären Octaëders diente.

In Fig. 82, Tab. XXI ist der Mittelpunkt *m* des Axenkreuzes sammt den Endpunkten *a* und *b*, *c* und *d*, *f* und *g* der Axen gerade ebenso aufgetragen, wie in Fig. 79. Tab. XXI
Fig. 82.

Die vier Punkte *acbd* dieses Axenkreuzes bilden ein Quadrat; ein zweites, diesem ganz gleiches Quadrat bilden die vier Punkte *agbf* (dieses Quadrat erscheint in Fig. 82 sowohl im Grundriss, wie auch im Aufriss zur Linie verkürzt). Ein drittes, diesen beiden entsprechendes Quadrat endlich bilden die vier Punkte *cgdf*.

Das erste dieser Quadrate steht rechtwinkelig auf der Axe *fg*, das zweite steht rechtwinkelig auf der Axe *cd*, das dritte endlich steht rechtwinkelig auf der vertikalen Axe *ab*.

Denken wir uns nun durch jedes dieser drei Quadrate eine Säule gelegt, deren Seitenflächen mit der auf der Ebene des Quadrats rechtwinkelig liegenden Axe parallel laufen, so ist derjenige Körper, welcher gleichsam den gemeinschaftlichen Kern dieser drei quadratischen Säulen bildet, das gesuchte Rhomben-Dodekaëder.

Nach dieser Definition wollen wir nun das Rhomben-Dodekaëder construiren.

Die durch das Quadrat *acbd* gelegte Säule sowohl wie die durch das Quadrat *agbf* gelegte sind horizontal, da ja beide Quadrate in vertikalen Ebenen liegen. In Fig. 82 sind

diese beiden Säulen mit Hinweglassung der dritten verzeichnet und zwar ist die durch das Quadrat $afbg$ gelegte kurz mit AB , die andere durch das Quadrat $acbd$ gelegte ist mit CD bezeichnet. (Im Aufriss sind die Buchstaben CD weggelassen.)

Die Seitenflächen der Säule CD erscheinen im Aufriss zu Linien verkürzt, während die beiden Endflächen der Säule AB im Grund- und Aufriss zu Linien verkürzt erscheinen.

Die beiden horizontalen Säulen AB und CD schneiden sich oben in den Kanten na , oa , pa und qa , unten aber in den Kanten nb , ob , pb und qb .

Im Aufriss sind die Buchstaben $nopq$ weggelassen.

Der Kern, welcher den beiden horizontalen Säulen AB und CD gemeinschaftlich angehört, ist offenbar die in Fig. 83 für sich allein dargestellte quadratische Doppelpyramide, deren obere Spitze in a , deren untere in b liegt, während die den beiden Pyramiden gemeinschaftliche Basis $nopq$ ist.

Die vier Flächen qpa , noa , qpb und nob gehören der horizontalen Säule AB , die vier Flächen nqa , poa , nqb und pob dagegen gehören der horizontalen Säule CD an.

Um nun das Rhomben-Dodekaëder zu erhalten, haben wir die in Fig. 83 dargestellte quadratische Doppelpyramide noch mit der durch das Quadrat $cf dg$ Fig. 82 gelegten vertikalen Säule zu combiniren, was in Fig. 84 auf Tab. XXII ausgeführt ist.

Tab. XXII

Fig. 84.

Im Aufriss der Fig. 84 ist die durch das Quadrat $cf dg$ gelegte vertikale Säule mit EF bezeichnet.

Die vertikalen Seitenflächen dieser Säule sind $acgf$, $acth$, $hibb$ und $fgdb$. Die erste dieser vier Flächen ist im Grundriss zu einer Linie verkürzt, welche mit df zusammenfällt; die zweite dieser Flächen fällt im Grundriss mit cf , die dritte fällt mit cg , die vierte fällt mit dg zusammen.

Die Buchstaben a , b , f und h ; c , g , b und i sind im Grundriss weggelassen, um eine Anhäufung von Buchstaben auf einem Punkte zu vermeiden.

Jede der Seitenflächen der vertikalen Säule EF schneidet ein Eck der quadratischen Doppelpyramide $qponab$ ab. Das Eck p wird durch die Säulenfläche $acgf$, das Eck q wird durch die Säulenfläche $acth$, das Eck n wird durch die Säulenfläche $hibb$ und das Eck o endlich wird durch die Säulenfläche $fgdb$ abgeschnitten.

Die Kante ap der Doppelpyramide wird von der Seitenfläche $acgf$ in dem leicht zu ermittelnden Punkte r geschnitten. Es ist dies ein Punkt, welcher der genannten Säulenfläche und der Pyramidenfläche qap gemeinschaftlich ist, also ein Punkt ihrer Durchschnittslinie.

Ein zweiter Punkt, welcher den genannten Flächen gemeinschaftlich ist, ist f , folglich ist rf die Linie, in welcher sich die Flächen qap und $acgf$ schneiden.

Ebenso ergeben sich fs , sd und dr als Durchschnittslinien der Säulenfläche $acgf$ mit den Pyramidenflächen qbp , pbo und pao .

In gleicher Weise ergibt sich der Rhombus $tfuc$ als die Durchschnittsfläche der quadratischen Doppelpyramide mit der Säulenfläche $acth$ u. s. w.

Die hinteren Flächen der vertikalen Säule EF schneiden die quadratische Doppelpyramide in den rhombischen Flächen $zgyc$ und $vd xg$, von welchen die erstere im Aufriss durch $tfuc$, die letztere durch $rfsd$ gedeckt erscheint.

Nach Wegfall der durch die vertikale Säule EF von der quadratischen Doppelpyramide abgeschnittenen Stücke bleibt also der durch zwölf Rhomben begränzte Körper übrig, welcher in Fig. 84 durch Schattirung hervorgehoben ist.

Die zwölf Rhomben dieses Körpers sind $atfr$, $azgv$, $bufs$ und $bygx$, welche der horizontalen Säule AB angehören; $atez$, $ardv$, $bucy$ und $bsdz$, welche der horizontalen Säule CD angehören und endlich $ftcu$, $frds$, $gzcy$ und $gvdx$, welche der vertikalen Säule EF angehören.

Alle die genannten Rhomben erscheinen im Grundriss und im Aufriss der Fig. 84 entweder als Quadrate oder zu Linien verkürzt.

Die wahre Gestalt dieser Rhomben lässt sich durch entsprechende Wendungen ermitteln, wie dies bereits auf Tab. X ausgeführt worden ist (siehe §. 19).

Nach Ermittlung der wahren Gestalt der Rhomben, durch welche das Rhombendodekaeder begrenzt ist, kann man leicht das Netz dieses Körpers zeichnen.

Um von dem Rhombendodekaeder Fig. 84 eine mehr übersichtliche Ansicht zu gewinnen, sind mit demselben zwei Wendungen Fig. 85 u. 86 vorgenommen worden. Der Aufriss Tab. XXII der Fig. 86 giebt ungefähr die Ansicht des Rhomben-Dodekaeders, wie sie sich in krystallographischen Werken findet.

Ohne weiter die Construction von Krystallen nach gegebenen Axenverhältnissen weiter zu verfolgen, wollen wir nur noch ein Beispiel der Construction eines Krystallkörpers nach den an demselben gemachten Winkelmessungen betrachten.

Die Grundgestalt der Barytkrystalle, welche dem rhombischen System (drei zu einander rechtwinkelige Axen, von denen keine der andern gleich ist) angehören, ist eine rhombische Säule, deren stumpfer Kantenwinkel 105° beträgt.

Wird diese Säule vertikal gestellt, so erscheint ihre Basis im Grundriss unverkürzt. Tab. XXIII. Construiert man also, wie dies im Grundriss Fig. 87, Tab. XXIII geschehen ist, einen Rhombus $abcd$, an welchem jeder der Winkel abc und cda gleich 105° ist, so stellt dieser die Horizontalprojection der besprochenen Säule dar.

Die kleine Diagonale db dieses Rhombus heisst die Mikrodiagonale, ac heisst die Makrodiagonale. Unsere Figur ist so gestellt, dass die Mikrodiagonale rechtwinkelig zur Grundlinie steht.

Die grosse Diagonale ac der rhombischen Basis unserer Säule ist 60^{mm} lang, während die Länge bd 45^{mm} beträgt; demnach verhält sich die Mikrodiagonale zur Makrodiagonale, wie $45 : 60$ oder wie 3 zu 4 , wie $\frac{3}{4} : 1$. Es lässt sich also auch durch Zeichnung das Grössenverhältniss der Axen eines Krystalls wenigstens annähernd ermitteln.

Wir wollen mit $abcd$ die obere, mit $a'b'c'd'$ die untere Fläche unserer rhombischen Säule bezeichnen. Im Grundriss sind, um eine Anhäufung der Buchstaben zu vermeiden, a', b', c' und d' , welche mit a, b, c und d zusammenfallen, weggelassen worden.

Jede der rhombischen Endflächen $abcd$ und $a'b'c'd'$ erscheint im Aufriss zur Linie verkürzt.

An den Barytkrystallen kommt nur selten die rhombische Säule mit ihren beiden geraden Endflächen allein vor, meist erscheint sie durch weiter hinzukommende Flächen abgeändert.

Zunächst erscheinen die scharfen Kanten cc' und aa' dieser Säule durch Flächen abgestumpft, welche parallel mit der Säulenaxe und rechtwinkelig auf den Makrodiagonalen ac stehen, welche also in unserer Figur im Grund- und Aufriss zur Linie verkürzt erscheinen. Im Aufriss ist die eine dieser Flächen mit $aa'bb'$, die andere mit $cc'dd'$ bezeichnet, welche Buchstaben im Grundriss weggelassen sind, wo die ihnen entsprechenden Punkte mit denen zusammenfallen, welche mit f, g, h und i bezeichnet sind und von denen alsbald weiter die Rede sein wird.

Durch das Abschneiden der scharfen Säulenkanten ist aus der rhombischen Säule eine sechsseitige geworden, welche oben durch das Sechseck $abcdbb$, unten aber durch das Sechseck $a'b'd'c'b'b'$ begrenzt ist.

An den Barytkrystallen erscheint nun diese sechsseitige Säule durch weitere Flächen, welche Ecken und Kanten abstumpfen, mehr oder weniger abgeändert.

Zunächst treten am oberen Ende der Säule zwei Flächen auf, welche sich in der Diagonalen bd schneiden, welche also wie bd selbst in unserer Figur rechtwinkelig auf der Senkfläche stehen und demnach im Aufriss zur Linie verkürzt erscheinen und welche gleiche Neigung gegen die vertikale Axe der Säule haben. Diese beiden Flächen schneiden sich in bd unter einem Winkel von 77° ; man erhält also diese Flächen im Aufriss, wenn man durch b auf der rechten und linken Seite eine Linie zieht, welche mit der Vertikalen bb' einen Winkel von $38\frac{1}{2}$ Grad macht.

Die eine dieser Flächen schneidet die vertikale Fläche $cdcb'$ in einer Linie hi , welche im Aufriss zum Punkt verkürzt, im Grundriss in ihrer wahren Länge erscheint. Der Kante hi entspricht auf der anderen Seite die Kante fg .

Den beiden Flächen $bdi h$ und $bdgf$ entsprechend ist der Krystall unten durch zwei Flächen begrenzt, welche sich in $b'd'$ unter einem Winkel von 77° schneiden. Die eine dieser Flächen ist $b'd'i'h'$, die andere ist $b'd'g'f'$. Im Grundriss erscheint die Fläche $b'd'i'h'$ gerade durch $bdi h$, und $b'd'g'f'$ erscheint gerade durch $bdgf$ gedeckt, weshalb denn auch im Grundriss die commatisirten Buchstaben b' und d' weggelassen sind.

So haben wir denn jetzt einen von 10 Flächen begrenzten Körper dargestellt, welcher im Wesentlichen eine oben und unten keilförmig zugespitzte sechsseitige Säule bildet.

Zwei der vertikalen Seitenflächen $ff'g'g$ und $hh'i'i$ sind längliche Rechtecke.

Die vier anderen Flächen der Säule $ff'b'b$, $hh'b'b$, $gg'd'd$ und $ii'd'd$ sind Paralleltapeze.

Die beiden Flächen, welche die Säule oben begrenzen, also $bdgf$ und $bdi h$, so wie die das untere Ende der Säule bildenden Flächen $b'd'g'f'$ und $b'd'i'h'$ sind gleichfalls Paralleltapeze.

Um die wahre Gestalt der im Grundriss zur Linie verkürzten Fläche $bb'h'h$ zu finden, muss man dieselbe im Grundriss um b drehen bis sie mit der Grundlinie parallel läuft, und dann den zugehörigen Aufriss construiren. Auf diese Weise ergiebt sich ein Aufriss $bb'p o$ als die wahre Gestalt der Säulenfläche $bb'h'h$.

Das Paralleltapez $bb'p o$ stellt auch die wahre Gestalt der Säulenflächen $bb'f'f$, $dd'g'g$ und $dd'i'i$ dar.

Wird die im Aufriss zur Linie verkürzte Fläche $hidd$ im Aufriss um den Punkt h gedreht bis sie wagerecht liegt, also bis der Punkt b nach q gekommen ist und dann zu dem gewendeten Aufriss der Grundriss construirt, so ergiebt sich $ihqr$ im Grundriss als die wahre Gestalt der Fläche $ihbd$, welcher $bdgf$, $b'd'g'f'$ und $b'd'i'h'$ gleich sind.

Nachdem man die wahre Gestalt der einzelnen Flächen ermittelt hat, welche den Körper begrenzen, den Fig. 81 im Grund- und Aufriss darstellt, ist es leicht das Netz desselben zu zeichnen, wie dies auf Tab. XXIV geschehen ist.

Um eine mehr übersichtliche Ansicht des Barytkrystalles zu erhalten, sind in Fig. 88 und 89 nach bekannter Weise Wendungen mit demselben vorgenommen worden. Der Auf-

riss Fig. 89 zeigt eine häufig bei Barytkrystallen vorkommende Flächencombination, meist aber sind noch weitere Flächen vorhanden, deren Betrachtung uns hier zu weit führen würde.

F ü n f t e s C a p i t e l .

Darstellung von Körpern, welche durch krumme Flächen begrenzt sind.

Cylinder, Kegel und Kugel. Von den unzähligen durch krumme Oberflächen be- 30
gränzten Körpern können wir hier nur die elementaren Formen betrachten, und zwar vor-
zugsweise nur die Cylinder mit kreisförmiger Basis, die Kegel von kreisförmiger
Basis und die Kugel.

Wenn ein gerader Cylinder von kreisförmiger Basis so gestellt ist, dass seine Axe verti- Tab. XXV
kal steht, wie in Fig. 1, Tab. XXV, so erscheint die obere und untere Gränzfläche im Aufriss Fig. 1.
zur Linie verkürzt, im Grundriss aber in ihrer wahren Gestalt, d. h. als Kreis.

Diese Stellung des Cylinders entspricht der in Fig. 52, Tab. XIII betrachteten Stellung
einer polygonalen Säule; an die Stelle des regulären Sechsecks von Fig. 52 ist hier der
Kreis getreten.

Mit dem Cylinder Fig. 1 sind nun in Fig. 2 und Fig. 3 der Tab. XXV ähnliche Wendun- Tab. XXV
gen vorgenommen worden, wie in Fig. 53 und Fig. 54 der Tab. XIII mit der sechsseitigen Fig. 2 u. 3.
Säule.

Um dies auszuführen, muss man zunächst den oberen Endkreis im Grundriss in eine An-
zahl gleicher Theile theilen (am bequemsten in zwölf gleiche Theile, wie es auch auf Tab. XXV
geschehen ist) und die Theilpunkte dann in den Aufriss bringen. Nachdem man den Auf-
riss gewendet hat, wie Fig. 2 zeigt, wird der obere Endkreis in Grundriss gebracht (siehe
§. 18). Ist aber einmal der eine nun zur Ellipse verkürzte Endkreis im Grundriss Fig. 2
verzeichnet, so braucht man den anderen Endkreis, hier also den unteren, nicht mehr nach
derselben Weise zu construiren, er ergiebt sich einfacher auf folgende Weise: Man bestimme
nach der bekannten Methode nur einen der zwölf Punkte des unteren Kreises im Grundriss
der Fig. 2, etwa d' , welcher im Aufriss der Fig. 1 gerade unter d liegt, ziehe dd' und mit dd'
parallel gerade Linien durch a, b, c u. s. w. bis m , auf denen man dann die Längen $aa',$
 bb', cc' u. s. w. bis mm' gleich dd' abmisst. Ueber die so erhaltenen Punkte $a', b', c' \dots m'$
wird dann der zur Ellipse verkürzte untere Endkreis im Grundriss der Fig. 2 gezogen.

In Fig. 3 ist nun der Grundriss der Fig. 2 gewendet und dann der dazu gehörige Auf-
riss construirt, was dadurch geschieht, dass man zunächst den oberen Endkreis $abc \dots m$

in Aufriss bringt und alsdann die Punkte des unteren Endkreises nach demselben Verfahren sucht, nach welchem der untere Endkreis im Grundriss der Figur 2 construiert worden ist.

Es wird nun wohl keine Schwierigkeit mehr für den Schüler haben, einen Cylinder so in Grund- und Aufriss zu bringen, dass seine Axe rechtwinkelig zur Senkfläche steht, dass also entsprechend der sechsseitigen Säule Fig. 55, Tab. XIV die kreisförmige Basis im Aufriss unverkürzt, im Grundriss aber zur Linie verkürzt erscheint.

Wenn die Axe des Cylinders mit der Grundlinie parallel liegt, wie in Fig. 4, Tab. XXVI, so erscheinen seine geraden Endflächen im Grundriss und im Aufriss zu Linien verkürzt.

Um eine Wendung des Cylinders Fig. 4 ausführen zu können, muss zuerst die Eintheilung des Umfanges eines der Endkreise im Grund- und Aufriss ausgeführt werden. Da diese Endkreise aber weder im Grundriss noch im Aufriss unverkürzt erscheinen, so muss man behufs der Eintheilung wenigstens einen derselben um 90° drehen, so dass er entweder der Senkfläche oder der Grundfläche parallel wird.

Wird der Endkreis $a'b'c' \dots m'$ auf der rechten Seite des Cylinders Fig. 4 um seine vertikale Axe $a'g'$ um 90° gedreht, so bleibt er im Grundriss zur geraden Linie verkürzt; k' kommt aber nach k'' . Im Aufriss erscheint er dann als unverkürzter Kreis, dessen Radius gleich $d'a'$ ist und von welchem man nur die eine Hälfte auszuziehen braucht. Nachdem dieser Halbkreis nach der bekannten Methode in sechs gleiche Theile getheilt worden ist, nachdem also auf seinem Umfang die Theilpunkte m'', l'', k'', i'' und h'' bezeichnet worden sind, deren jeder um $\frac{1}{12}$ des Kreisumfangs von dem anderen absteht, werden sie in Grundriss gebracht. Ist dies geschehen, so ist es leicht, die Punkte m', l', k', i', h' u. s. w. zu ermitteln, welche die fraglichen Theilpunkte einnehmen, wenn der Endkreis wieder in seine ursprüngliche Lage zurückgebracht wird.

Nachdem man so auf dem im Grund- und Aufriss verkürzten Kreise die zwölf Punkte aufgetragen hat, welche seinen Umfang in zwölf gleiche Theile theilen, kann die Wendung im Tab. XXVI Grund- oder Aufriss vorgenommen werden. In Fig. 5 auf Tab. XXVI ist der Aufriss gewendet und zu dem gewendeten Aufriss der neue Grundriss construiert.

Fig. 6, Tab. XXVII stellt Grund- und Aufriss eines geraden Kegels von kreisförmiger Basis dar. Derselbe ist in Fig. 7 zunächst im Aufriss gewendet und der zugehörige Grundriss gesucht, und dann in Fig. 8 der neue Grundriss gewendet und endlich zu dem Grundriss Fig. 8 der Aufriss construiert und zwar sind diese Operationen hier mit dem Kegel ganz in gleicher Weise ausgeführt, wie es auf Tab. XIV mit der regulären sechsseitigen Säule geschehen ist.

Die Kugel erscheint im Grund- und Aufriss nur als Kreis; für sich selbst bedarf also ihre Zeichnung keine Erläuterung; von ihrem Durchschnitt mit anderen Körpern wird weiter unten die Rede sein.

31 Die Kegelschnitte. Die Durchschneidungcurve von Kegeln mit ebenen Flächen lässt sich ganz nach denselben Principien construiren, welche in §. 27 auf die Durchschneidung von Pyramiden und ebenen Flächen angewandt wurden. An die Stelle der Pyramidenkanten treten hier nur die Kegelseiten, d. h. Linien, welche von der Spitze des Kegels nach beliebigen Punkten des Umfangs der kreisförmigen Basis gezogen sind. Am bequemsten wird es sein, wenn man den Umfang des Grundkreises in zwölf gleiche Theile theilt, wie

dies in Fig. 9, Tab. XXVIII an einem geraden aufrechtstehenden Kegel von kreisförmiger Basis ausgeführt worden ist, wo $a, b, c \dots m$ die zwölf Theilpunkte der Basis, $sa, sb, sc \dots sm$ Fig. 9. also zwölf Seitenlinien des Kegels sind.

Dieser Kegel soll nun von einer Ebene geschnitten werden, welche im Aufriss zur geraden Linie AB verkürzt erscheint. Diese Ebene schneidet die Kegelseite sl im Punkt l , welcher sich im Aufriss unmittelbar ergiebt und welchen man im Grundriss erhält, wenn von l des Aufrisses ein Perpendikel in den Grundriss herabfällt bis zur Durchschneidung mit ls des Grundrisses. Auf gleiche Weise ergeben sich im Grund- und Aufriss die Punkte f, i, h, f, e, d, c, b und m .

Die Punkte a und g lassen sich auf diese Weise nicht in Grundriss bringen, weil ein von a des Aufrisses in den Grundriss gefälltes Perpendikel hier die Seite sa nicht schneidet, sondern mit ihr ganz und gar zusammenfällt. Um die Punkte a und g im Grundriss zu erhalten, wird von demselben Kunstgriff Gebrauch gemacht, durch welchen der Punkt i im Grundriss der Fig. 72 bestimmt wurde (siehe §. 27). Dieser Kunstgriff vereinfacht sich in unserem Falle dahin, dass man durch a des Aufrisses eine Horizontale at bis zur Durchschneidung mit sd zieht und dann im Grundriss auf der Linie ag von s aus die Längen sa und sg gleich der Länge at des Aufrisses abmisst.

Hat man auf diese Weise die Punkte $a, b, c \dots m$ im Grundriss gefunden, so hat man sie durch eine Curve zu verbinden, welche übrigens nicht die wahre Gestalt der gesuchten Durchschnittscurve darstellt. Um diese zu erhalten, errichte man (entsprechend der Construction der wahren Durchschnittsfigur einer Pyramide und einer Ebene in Fig. 71, Tab. XVIII) in den Punkten l, m, a, b und c im Aufriss der Fig. 9 Perpendikel auf AB und mache ll' gleich der Hälfte der Linie li des Grundrisses, ferner mm' gleich $\frac{1}{2} mh$, aa' gleich $\frac{1}{2} ag$, bb' gleich $\frac{1}{2} bf$ und endlich cc' gleich $\frac{1}{2} ce$. Verbindet man die so erhaltenen Punkte l', m', a', b' und c' mit f und d , wie es in Fig. 9 geschehen ist, durch eine Curve, so ist dies die wahre Gestalt der halben Durchschnittscurve.

In dem eben betrachteten Falle ist der Winkel, welchen die schneidende Ebene AB mit der Axe des Kegels macht, grösser als der Winkel, welchen eine Kegelseite mit dieser Axe macht. So lange dies der Fall ist, bildet die Durchschnittslinie des Kegels und der Ebene eine geschlossene Curve, welche unter dem Namen der Ellipse bekannt ist. Steht die schneidende Ebene AB rechtwinkelig auf der Kegelaxe, so geht die Ellipse in einen Kreis über; je kleiner aber der Winkel wird, welchen die schneidende Ebene AB mit der Kegelaxe macht, desto mehr wird die Ellipse langgestreckt. Wird endlich der Winkel, welchen die schneidende Ebene AB mit der Kegelaxe macht, gleich dem Winkel zwischen einer Kegelseite und der Kegelaxe, oder mit anderen Worten, liegt die schneidende Ebene AB mit einer Kegelseite parallel, wie dies in Fig. 10 der Fall ist, wo AB mit sk parallel läuft, so hört die Durchschnittslinie auf, eine geschlossene zu sein, sie wird eine Parabel.

In Fig. 10, Tab. XXVIII ist die Construction der Parabel $abcde$ genau nach demselben Tab. XXVIII Verfahren ausgeführt worden, welches in Fig. 9 zur Construction der Ellipse in Anwendung Fig. 10. gebracht worden war, es wird deshalb eine weitere Besprechung der Fig. 10 nicht nöthig sein.

Wenn der Winkel, welchen die schneidende Ebene mit der Kegelaxe macht, noch spitzer ist als der Winkel einer Kegelseite und der Axe, so wird die Durchschnittscurve eine Hyperbel.

Tab. XXIX In Fig. 11, Tab. XXIX, ist die Hyperbel für den Fall construirt, dass die schneidende Ebene mit der Kegelaxe parallel ist, dass sie also im Grundriss zur Linie verkürzt erscheint.

Wollte man in diesem Falle die schneidende Ebene wie bisher so stellen, dass sie auf der Senkfläche rechtwinkelig steht, so würde sie sowohl im Grundriss als auch im Aufriss zur Linie verkürzt erscheinen. In Fig. 11 ist dagegen die im Grundriss zur Linie verkürzte schneidende Ebene AB mit der Grundlinie parallel gelegt, so dass im Aufriss nun die Durchschnitcurve gleich in ihrer wahren Gestalt erscheint.

Um die einzelnen Punkte der Durchschnitcurve zu finden, kann man nun verschiedene Wege einschlagen. Legt man in verschiedenen Höhen horizontale Ebenen durch den Kegel, so schneiden sie ihn in Kreisen, welche im Grundriss unverkürzt erscheinen. Die horizontale Ebene CD z. B. schneidet den Kegel in einem Kreis, dessen Radius offenbar gleich der Länge ca oder cb des Aufrisses ist; zieht man mit diesem Radius im Grundriss um s einen Kreis, welcher in unserer Figur an mehreren Stellen seines Umfanges mit r bezeichnet ist, so ist dies der fragliche Durchschnitkreis der horizontalen Ebene CD mit dem Kegel und dieser Kreis schneidet die zur Linie verkürzte Ebene AB im Grundriss in den beiden Punkten a und b . Um diese Punkte in Aufriss zu bringen, zieht man durch a und b des Grundrisses Vertikale bis zur Durchschneidung mit der Linie CD des Aufrisses. Die so ermittelten beiden Punkte a und b sind zwei Punkte der gesuchten Durchschnitpunkte.

Auf gleiche Weise sind die Punkte c und d der Hyperbel gefunden.

Der Gipfelpunkt f der Hyperbel ergibt sich zunächst im Grundriss, wenn man von s ein Perpendikel sf auf AB fällt, alsdann im Grundriss durch s eine Linie parallel mit der Grundlinie zieht und auf derselben sf'' gleich sf abmisst. Eine durch f'' des Grundrisses gezogene Vertikale schneidet im Aufriss die Kegelaxe sn in einem Punkte f'' , welcher mit dem gesuchten Gipfelpunkt in gleicher Höhe liegt; um ihn endlich zu erhalten, hat man also durch f'' des Aufrisses eine horizontale Linie zu legen und ihren Durchschnitpunkt f mit der Vertikalen st zu ermitteln.

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens liegt so nahe, dass er wohl keiner weiteren Ausführung bedarf.

Ein zweites Verfahren, einzelne Punkte der Hyperbel in dem vorliegenden Falle zu bestimmen, besteht darin, dass man eine entsprechende Anzahl von Kegelseiten im Grund- und Aufriss zieht und die Punkte ermittelt, in denen sie von der Ebene AB durchschnitten werden. Unsere Figur zeigt z. B. die Kegelseite so im Grund- und Aufriss. Im Grundriss wird so durch AB in g geschnitten; den Durchschnitpunkt g erhält man aber im Aufriss, wenn man durch g des Grundrisses eine Vertikale bis zur Durchschneidung mit so des Aufrisses zieht. Der so gefundene Punkt g ist ein Punkt der gesuchten Durchschnitcurve.

32 **Durchdringung des Kegels und des Cylinders mit ebenflächigen Körpern.** Da ein gerader Cylinder von kreisförmiger Basis nichts anderes ist, als eine gerade reguläre Ecksäule, deren Basis unendlich viele Seiten hat, ein gerader Kegel von kreisförmiger Basis aber als eine Pyramide betrachtet werden kann, deren Basis ein Vieleck von unendlich vielen Seiten ist, so ist klar, dass die in §. 28 entwickelten Grundsätze auch hier vollständig zur Anwendung kommen, wie dies an einigen Beispielen erläutert werden soll.

Tab. XXIX In Fig. 12 auf Tab. XXIX ist die Durchdringung einer horizontalen quadratischen Säule mit einem vertikalen geraden Kegel von kreisförmiger Basis construirt. Die Axe der Säule geht in dem hier betrachteten Beispiel nicht durch die Axe des Kegels. Dieser Fall ent-

spricht dem auf Tab. XIX, Fig. 75 durchgeführten, nur ist hier an die Stelle der verticalen quadratischen Säule der vertikale Kegel getreten. Die in Fig. 12, Tab. XXIX vollständig durchgeführte Construction bedarf deshalb auch wohl keiner weiteren Erläuterung.

In Fig. 13, Tab. XXX sind die Durchschneidungscurven eines geraden Kegels von kreisförmiger Basis mit einer horizontalen quadratischen Säule construirt, deren Axe durch die Kegelaxe geht. Tab. XXX
Fig. 13.

Die oberste Kante ab der quadratischen Säule schneidet (da sie durch die Kegelaxe geht) die mit der Senkfläche parallelen Kegelseiten so und sp in den Punkten a und b .

Eine durch die Kanten cd und ef gelegte Horizontalebene schneidet die quadratische Säule in dem länglichen Rechteck $cdfe$, welches im Aufriss zur Linie verkürzt, im Grundriss aber unverkürzt erscheint. Dieselbe Horizontalebene schneidet aber auch den Kegel und zwar in einem Kreis, welcher gleichfalls im Aufriss zur Linie verkürzt (die Linie rst), im Grundriss aber in seiner wahren Gestalt erscheint. Der Umfang dieses Kreises ist im Grundriss durch 1 bezeichnet. Der Radius dieses Kreises ist gleich rs oder st .

Die Punkte c und d , in welchen die Kante cd den Umfang dieses Kreises 1 schneidet, sind die beiden Punkte, in welchen cd die Kegeloberfläche trifft; sind sie einmal im Grundriss bestimmt, so ist es leicht sie in Aufriss zu bringen.

Denken wir uns ferner durch einen beliebigen Punkt v der Kegelaxe, welcher höher über der Grundfläche liegt als cd , aber weniger hoch als ab , abermals eine Horizontalebene gelegt, so schneidet diese den Kegel in einem Kreise, dessen Radius gleich vu ist und welcher im Grundriss unverkürzt erscheint; sein Umfang ist im Grundriss mit 2 bezeichnet.

Dieselbe Horizontalebene schneidet aber auch die quadratische Säule, und zwar in einem länglichen Rechteck $ghik$, welches im Aufriss zur Linie verkürzt nach dem bekannten Verfahren leicht in Grundriss gebracht werden kann. Im Grundriss schneidet nun die Linie gh den Kreis 2 in den Punkten g und h . Es sind dies zwei weitere Punkte der gesuchten Durchschnittscurve, welche leicht in Aufriss gebracht werden können.

In dieser Weise kann man noch mehrere Punkte der Curve construiren, in welcher sich die Säulenfläche $acdb$ und die Kegeloberfläche schneiden; die so gefundenen Punkte sind dann durch eine krumme Linie zu verbinden.

Führt man die Construction in der angegebenen Weise weiter aus, so ergeben sich als Durchschnitt der Kegeloberfläche mit der Säulenfläche $acdb$ die beiden getrennten Curvenstücke agc und bhb , welche offenbar Stücke einer und derselben Ellipse sind.

Die Durchschnittscurve der Kegeloberfläche mit der Säulenoberfläche $aefb$ erscheint im Aufriss durch agc und bhb gedeckt.

Die Durchschnittslinien der beiden unteren Säulenflächen mit der Kegeloberfläche werden ganz nach demselben Verfahren construirt, welches soeben zur Construction der Curven agc und bhb angewandt worden ist.

Um den Durchschnitt einer horizontalen Säule mit einem Kegel zu construiren, kann man auch das durch Fig. 14, Tab. XXX erläuterte Verfahren anwenden, welches darin besteht, dass man Kegel und Säule in eine solche Stellung bringt, dass die Basis der Säule im Aufriss unverkürzt, die Seitenflächen derselben also zu Linien verkürzt erscheinen.

In Fig. 14 ist der Durchschnitt des Kegels mit einer horizontalen unregelmässigen dreiseitigen Säule construirt, deren vordere Endfläche abc ist. Den vorderen entsprechend sind die Eckpunkte der hinteren Endfläche der Säule mit $a'b'c'$ bezeichnet. Tab. XXX
Fig. 14.

Hier erscheinen nun die Durchschnittscurven der Kegeloberfläche mit den einzelnen Säulenflächen im Aufriss zu geraden Linien verkürzt und es lässt sich leicht der Durchschnittspunkt einer Seitenfläche der Säule mit einer beliebigen Kegelseite im Aufriss bezeichnen und dann in Grundriss bringen.

Die Durchschnittspunkte a und a' der Kante aa' mit der Kegeloberfläche liegen im Aufriss sämmtlich hinter a . Man findet die Lage von a im Grundriss, wenn man im Aufriss durch a die Kegelseite sf zieht und diese zunächst in Grundriss bringt. a liegt auf dem Durchschnitt von fs mit der Kante aa' . Der Durchschnittspunkt a' liegt im Grundriss auf dem Durchschnittspunkt von $f's$ mit aa' .

In gleicher Weise liessen sich die Durchschnittspunkte der horizontalen Kante bb' mit dem Kegel ermitteln, doch könnte man in diesem Falle keine grosse Genauigkeit in der Bestimmung der fraglichen Punkte erwarten, weil die sich schneidenden Linien einen zu spitzen Winkel miteinander machen.

Genauer ergaben sich b und b' im Grundriss als die Durchschnittspunkte der Kante bb' mit einem Kreis, dessen Radius gleich ist der Länge rt im Aufriss. Die Länge rt ist dasjenige Stück einer im Aufriss durch b gezogenen Horizontalen, welches zwischen der vertikalen Axe des Kegels und der äussersten Kegelseite sh liegt.

Den Punkt d , in welchem die Kegelseite sg von der ebenen Fläche $aa'b'b$ geschnitten wird, erhält man im Grundriss als den Durchschnittspunkt der Geraden gg' mit einem Kreis, dessen Radius gleich ist der Länge dn des Aufrisses. Diese Länge dn erhält man, wenn man durch den Durchschnittspunkt von sg und ab im Aufriss eine Horizontale zieht und von dieser dasjenige Stück nimmt, welches zwischen sg und sh liegt.

Durch die Punkte a , d und b lässt sich nun leicht im Grundriss eine krumme Linie ziehen. Es ist dies die Durchschnittscurve der Fläche $abb'a'$ mit dem vorderen Theil des Kegels, während $a'd'b'$ die Durchschnittscurve derselben Fläche mit dem hinteren Theil des Kegels ist.

Der Punkt h , in welchem die Kegelseite sh die Säulenfläche $bcc'b'$ schneidet, ergibt sich im Aufriss als Durchschnittspunkt von sh und bc . Man findet diesen Punkt h im Grundriss, wenn man von h des Aufrisses ein Perpendikel bis auf sh des Grundrisses herabfällt.

Um weitere Punkte der Curve zu finden, in welcher die Kegeloberfläche von der Säulenfläche $bcc'b'$ geschnitten wird, ziehe man im Grund- und Aufriss beliebig die Kegelseiten is , $i's$, ks und $k's$, welche im Aufriss die Linie bc in den Punkten i und k schneiden, und ziehe dann von i und k des Aufrisses Perpendikel herab bis zum Durchschnitt mit si , si' , sk und sk' . Schliesslich werden die Punkte b , f , i , h , i' , k' und b' durch eine Curve verbunden.

Nach dieser ausführlichen Auseinandersetzung bedarf es wohl keiner weiteren Erläuterung mehr, wie die Durchschnittscurve des Kegels mit der Säulenfläche $acc'a'$ construirt wird.

Wir haben bisher nur solche Fälle betrachtet, in welchen die Axe der Säule rechtwinklig stand zur Axe des Kegels, wo also die Säulenaxe wagerecht lag, wenn die Kegelaxe vertikal stand. Aber auch für den Fall, dass die Säulen- und die Kegelaxe sich nicht rechtwinklig schneiden, lässt sich die Construction der Durchschnittscurven auf das eben besprochene Verfahren zurückführen.

Kegels und einer quadratischen Säule dar, deren Axe die Kegelaxe nicht rechtwinkelig schneidet. In dieser Figur ist die Durchschnittscurve der beiden Körper noch nicht eingetragen, dagegen ist der Grundkreis des Kegels durch die Punkte $a, b, c \dots m$ in zwölf gleiche Theile getheilt und im Grundriss sowohl als im Aufriss sind die zwölf Kegelseiten $as, bs, cs \dots ms$ gezogen.

Die vier Säulenkanten der quadratischen Säule sind pq, rt, uv und xz . Die Säule ist so gelegt, dass ihre Axe die Kegelaxe schneidet, dass also auch die Kante pq sowohl wie rt die Kegelseiten as und gs schneiden. Die Lage der fraglichen Durchschnittspunkte ist im Aufriss der Fig. 15 leicht zu ermitteln; sie sind durch stärkere Punkte markirt.

Um nun die übrigen Punkte der gesuchten Durchschnittscurve zu ermitteln, hat man zunächst den Aufriss der Fig. 15 so weit zu wenden, dass die Kanten der Säule wagerecht stehen, wie dies in Fig. 16 ausgeführt ist, und dann zu dem gewendeten Aufriss den Grundriss zu Tab. XXXI
Fig. 16. construiren.

Natürlich fehlen jetzt in Fig. 16 vor der Hand noch sowohl im Grundriss wie im Aufriss die Durchschnittscurven, welche sich erst später ergeben.

Nun wird, wie es in Fig. 17 geschehen ist, der Grundriss der Fig. 16 um 90° gewendet, Tab. XXXI
Fig. 17. so dass die Axe der nun horizontalen Säule rechtwinkelig auf die Senkfläche zu stehen kommt. Zu dem Grundriss Fig. 17 ist dann leicht nach den bekannten Regeln der Aufriss zu construiren, in welchem nun die Seitenkanten der Säule zu Punkten, die Seitenfläche derselben zu geraden Linien verkürzt erscheinen.

Der Grundkreis des Kegels erscheint im Aufriss Fig. 17 als Ellipse.

Hier in diesem Aufriss Fig. 17 nun lassen sich die Durchschnitte aller Kegelseiten as, bs, cs, ds u. s. w. mit den Seitenflächen der quadratischen Säule unmittelbar bestimmen, weil eben diese Säulenflächen zu Linien verkürzt erscheinen. Der Durchschnittspunkt der Kegelseite fs z. B. mit der Fläche $puvq$ muss im Aufriss Fig. 17 auf der Geraden pu liegen, er befindet sich also in f' . Die Kegelseiten es, ds, cs und bs schneiden im Aufriss Fig. 17 die Linie pu in e', d', c' und b' , und dies sind nun auch die Durchschnittspunkte der Fläche $puvq$ mit den genannten Kegelseiten. Hat man aber einmal die Punkte f', b', e', c' und d' im Aufriss Fig. 17 bezeichnet, so sind sie nun leicht in den Aufriss der Fig. 16 zu übertragen; man hat nur horizontal herüber zu ziehen von f' , Fig. 17, bis zur Linie fs in Fig. 16, von b' im Aufriss Fig. 17 bis zur Linie bs im Aufriss Fig. 16 u. s. w.

Hat man einmal im Aufriss Fig. 16 die Punkte b', c', d', e', f' und a' bestimmt, so lässt sich über dieselben leicht, wie es in Fig. 16 geschehen ist, die Curve ziehen, in welcher die Säulenfläche $puvq$ von der Kegelfläche geschnitten wird.

Die Durchschnittscurve der Säulenfläche $pxzq$ mit dem Kegel, also die Curve $a'm'l'k'i'h'g'$ ist im Aufriss der Fig. 16 gerade von der Curve $a'b'c'd'e'f'g'$ gedeckt.

Die Punkte der Curve, in welchen die Säulenfläche $urtv$ von der Kegelfläche geschnitten wird, sind im Aufriss der Fig. 16 durch Vermittelung der Fig. 17 nach demselben Verfahren zu suchen, welches eben für die Construction der Durchschnittscurve der oberen Säulenflächen in Anwendung gebracht worden ist. Die Durchschnittscurve ist in Fig. 16 zwar gezogen, allein die zur Bestimmung der einzelnen Punkte nothwendigen Hülfslinien sind weggelassen worden.

Wie die nun im Aufriss der Fig. 16 gezogenen Durchschnittscurven in den Grundriss gebracht werden, bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung.

Aus dem Aufriss der Fig. 16 lassen sich die Durchschnittscurven leicht in den Aufriss

der Fig. 15 übertragen, da beide Figuren an und für sich einander gleich, nur verschieden gegen die Grundlinie gestellt sind.

Aus einer genaueren Betrachtung der Aufrisse Fig. 16 u. 17 und ihre gegenseitigen Beziehungen lässt sich ein Verfahren ableiten, die Durchschnittscurven ohne die zweimaligen Wendungen zu construiren. Folgende Punkte sind es, welche man dabei besonders ins Auge zu fassen hat.

1) Die Mittellinie sag des Aufrisses Fig. 17 ist parallel mit pr oder qt , d. h. parallel mit den im Aufriss der Fig. 16 zur Linie verkürzten Endflächen der quadratischen Säule.

2) Alle Punkte des Aufrisses Fig. 17 sind mit den gleichnamigen Punkten des Aufrisses Fig. 16 durch Linien verbunden, welche mit der Richtung der Längskanten der quadratischen Säule im Aufriss der Fig. 16 parallel laufen. So ist z. B. die Linie, welche die Punkte a der beiden Aufrisse mit einander verbindet, parallel mit der Säulenkante rt , und p im Aufriss der Fig. 17 liegt in der Verlängerung der Kante pq im Aufriss der Fig. 16.

3) Der Abstand eines jeden Punktes im Aufriss der Fig. 17 von der Mittellinie sag ist gleich dem Abstand des gleichnamigen Punktes im Grundriss der Fig. 16 oder der Fig. 15 von der Geraden asg . So ist z. B. nd im Aufriss Fig. 17 gleich ds im Grundriss Fig. 15 und oc im Aufriss der Fig. 17 halb so lang als die Linie cl im Grundriss der Fig. 15.

Es sei nun in Fig. 18 Grund- und Aufriss des Kegels und der quadratischen Säule gerade ebenso aufgetragen wie in Fig. 15, so kann man die Durchschnittscurven nach folgendem, aus dem vorhergehenden abgeleiteten abgekürzten Verfahren construiren.

Tab. XXXI Neben dem Aufriss Fig. 18 lässt sich nach den obigen Bemerkungen leicht eine andere
Fig. 18. Projection des Kegels und der Säule zeichnen, welche dem Aufriss Fig. 17 gleich zu dem Aufriss Fig. 18 in derselben Beziehung steht, wie der Aufriss Fig. 17 zum Aufriss der Fig. 16, und zwar genügt es in diesem Falle, nur die eine Hälfte dieser Hilfsprojection aufzutragen.

Nehmen wir deshalb ohne Weiteres die Verlängerung von qt im Aufriss Fig. 18 zur Mittellinie der Hilfsprojection, so findet man die Punkte s , a und g in derselben, wenn man von s , a und g des ursprünglichen Aufrisses Fig. 18 Perpendikel auf die Verlängerung von qt fällt.

Zieht man nun ferner durch die Punkte d , c , b u. s. w. des Aufrisses Fig. 18 Linien parallel mit rt , misst man auf diesen von der Linie sg der Hilfsprojection nach der rechten Seite hin die Länge nd gleich der Länge ds des Grundrisses, oc gleich ey des Grundrisses u. s. w., so erhält man die Punkte d , c , b , e und f in der Hilfsprojection und kann nun in derselben die Kegelseiten fs , es , ds , cs und bs ziehen.

Die Linie qt des Aufrisses Fig. 18, welche die zur geraden Linie verkürzte quadratische Endfläche $qvzt$ darstellt, bildet in der Hilfsprojection die Diagonalen der unverkürzt erscheinenden vorderen Endfläche der Säule, von welcher in unserem Falle nur die eine Hälfte zu zeichnen nöthig ist. Man findet den Punkt u in der Hilfsprojection, wenn man in der Verlängerung von uv des ursprünglichen Aufrisses von v nach der rechten Seite hin vu gleich vq oder gleich vt macht.

Zieht man nun in der Hilfsprojection die Linien qu und tu , so schneiden diese die Kegelseiten in den Punkten f' , b' , e' u. s. w. Diese Punkte werden aber aus der Hilfsprojection in den ursprünglichen Aufriss Fig. 18 gerade ebenso übertragen, wie aus dem Aufriss Fig. 17 in den Aufriss Fig. 16, indem man von f' , b' , e' u. s. w. der Hilfsprojection parallel mit rt Linien zieht bis zur Durchschneidung mit den Kegelseiten sf , bf , ef u. s. w. im ursprünglichen Aufriss der Fig. 18.

Hat man einmal die Durchschnittscurve im Aufriss construiert, so kann man sie auch leicht in Grundriss bringen, wie dies für Fig. 16 und Fig. 18 geschehen ist.

Gegenseitige Durchdringung krummflächiger Körper. Die krummen Oberflächen, deren gegenseitige Durchdringung hier verhandelt werden kann, sind die regulären Kegel und Cylinder nebst der Kugel. 33

Da der reguläre Cylinder als eine Ecksäule, und der reguläre Kegel als eine Pyramide betrachtet werden kann, deren Basis ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten ist, so lassen sich die Aufgaben über die gegenseitige Durchdringung von Cylindern und Kegeln nach den in den letzten Paragraphen bereits besprochenen Methoden ausführen.

Die Durchschnittslinie eines vertikalen und eines horizontalen Cylinders ist nach dem in Fig. 12, Tab. XXIX für einen aufrechten Cylinder und eine horizontale quadratische Säule in Anwendung gebrachten Verfahren zu construiren. Zur Uebung construiren der Schüler die Durchschnittscurve für den Fall, dass an die Stelle der quadratischen Säule Fig. 12 ein horizontaler Cylinder tritt, dessen Radius gleich ist der halben Diagonale jener quadratischen Säule.

Die Durchschnittscurve eines geraden Kegels mit einem horizontalen Cylinder ist entweder nach dem in Fig. 13 oder nach dem in Fig. 14 auf Tab. XXX erläuterten Verfahren construiert.

Die Ausführung einiger Uebungsbeispiele bleibt dem Schüler überlassen.

Die Durchschneidung eines geraden Kegels mit einem schiefliegenden Cylinder wird ganz nach dem auf Tab. XXXI erläuterten Verfahren behandelt. — Nach dem in Fig. 18 auf Tab. XXXI angewandten abgekürzten Verfahren ist in Fig. 19, Tab. XXXII die Durchschnittscurve eines geraden Kegels mit einem schiefliegenden Cylinder construiert. In dem hier betrachteten Falle wird die Kegelaxe von der Cylinderaxe durchschnitten. Tab. XXXII Fig. 19.

Einer weiteren Erläuterung bedarf diese Figur wohl nicht.

Die Durchschnittscurven einer Kugel mit Pyramiden und Ecksäulen sowohl wie mit Kegeln und Cylindern sind leicht zu construiren, wenn man bedenkt, dass jeder Durchschnitt einer Kugel mit einer Ebene ein Kreis ist.

Als Beispiel mag die Construction der Durchschneidungscurven eines Kegels und einer Kugel in Fig. 20, Tab. XXXII dienen.

Der Mittelpunkt der Kugel ist mit M , der Mittelpunkt des Grundkreises des Kegels ist mit N bezeichnet. Tab. XXXII Fig. 20.

Die vertikale Axe des Kegels erscheint im Grundriss zum Punkt N verkürzt, der vertikale Durchmesser der Kugel erscheint im Grundriss zum Punkt M verkürzt.

Die horizontale Ebene AB schneidet die Kugel in einem Kreise, welcher im Aufriss zur Linie verkürzt, im Grundriss in seiner wahren Gestalt erscheint. Im Grundriss fällt der Mittelpunkt dieses Kreises mit M zusammen; sein Radius ist gleich rs und mit diesem Radius ist im Grundriss um M der punktirte Kreis gezogen, welcher mit I bezeichnet ist.

Ebenso wird der Kegel von der Ebene AB in einem Kreis geschnitten, dessen Mittelpunkt im Grundriss mit N zusammenfällt und dessen Radius gleich tu ist.

Der im Grundriss mit dem Radius tu punktiert gezogene Kreis ist mit 1 bezeichnet.

Die beiden in einer Horizontalebene liegenden Kreise 1 und I schneiden sich im Grundriss in den Punkten a und b , und dies sind zwei Punkte der gesuchten Durchschnittscurve.

Auf dieselbe Weise ergeben sich die zwei weiteren mit c und d bezeichneten Punkte der Durchschnittscurve. Die horizontale Ebene CD schneidet die Kugel in dem im Grundriss ausgezogenen, mit II bezeichneten, den Kegel aber in dem mit 2 bezeichneten Kreise; c und d sind die Durchschnittspunkte dieser beiden Kreise.

Hat man die Punkte c und d , a und b im Grundriss bestimmt, so kann man sie leicht in Aufriss bringen, wie es in unserer Figur geschehen ist.

Auf diese Weise kann man so viel Punkte der Durchschnittscurve bestimmen, als man nöthig hat, um dieselben mit Sicherheit zu ziehen.

Bei der in Fig. 20 dargestellten gegenseitigen Stellung des Kegels und der Kugel steckt ein Theil des Kegels ganz in der Kugel drin, so dass sich die beiden Oberflächen in zwei ganz getrennten Curven schneiden, nämlich da, wo der Kegel unten in die Kugel eintritt, und da wo er oben aus der Kugel wieder heraustritt. Die Punkte $abcd$ sind Punkte der oberen Durchschnittscurve. Die untere Durchschnittscurve wird ganz in derselben Weise construirt, wie die obere.

Zu weiterer Uebung construiren der Schüler die Durchschnittscurve desselben Kegels und derselben Kugel für den Fall, dass bei unveränderter Stellung des Kegels die Kugel so weit verschoben wird, dass ihr Mittelpunkt an die in Fig. 20 im Grund- und Aufriss mit M' bezeichnete Stelle zu stehen kommt.

- 34 **Die Schraubenlinie.** Wenn man auf dem Umfang eines Cylinders einen Punkt so herumführt, dass er bei gleichförmiger Drehung um die Axe des Cylinders zugleich gleichförmig in der Richtung der Cylinderaxe fortschreitet, so entsteht eine Schraubenlinie.

So kann man sich die Schraubenlinie in Fig. 21, Tab. XXXIII dadurch entstanden denken, dass Tab. XXXIII um den aufrechtstehenden Cylinder, welchen Fig. 21 im Grund- und Aufriss zeigt, von a ausgehend Fig. 21. ein Punkt in der Weise um den Mantel des Cylinders herumgeführt worden ist, dass er bei einem vollständigen Umgang gleichförmig steigend um 12 Millimeter in die Höhe gegangen ist.

Die Höhe, um welche die Schraubenlinie bei jedem vollen Umgang um den Cylinder ansteigt, wird die Höhe eines Schraubenganges genannt. Bei der in Fig. 21 verzeichneten Schraubenlinie beträgt die Höhe eines Schraubenganges 12 Millimeter.

Danach ergibt sich denn auch einfach die Construction der Schraubenlinie.

Zunächst theile man den Umfang des Grundkreises im Grundriss von a ausgehend in eine beliebige Anzahl, etwa in 12 gleiche Theile; bringe dann die Theilpunkte a, b, c, d, e u. s. w. in Aufriss und ziehe im Aufriss durch jeden derselben eine Vertikale. Diese Vertikalen sind in unserer Figur mit aa', bb', cc', dd' u. s. w. bezeichnet. Man erhält nun eine Reihe von Punkten der Schraubenlinie, wenn man von der Grundlinie an gerechnet auf bb' $\frac{1}{12}$, auf cc' $\frac{2}{12}$, auf dd' $\frac{3}{12}$ u. s. w. der Höhe eines Schraubenganges abmisst. Da hier die Höhe des Schraubenganges gleich 12 Millimeter angenommen worden ist, also $\frac{1}{12}$ der Höhe eines Schraubenganges gerade 1 Millimeter beträgt, so ist in unserer Figur von der Grundlinie an gerechnet nach oben hin abgemessen worden:

auf bb'	1 ^{mm}	auf gg'	6 ^{mm}	auf mm'	11 ^{mm}
„ cc'	2	„ hh'	7	„ aa'	12
„ dd'	3	„ ii'	8	„ bb'	13
„ ee'	4	„ kk'	9	„ cc'	14
„ ff'	5	„ ll'	10	„ dd'	15
		u. s. w.			

Auf diese Weise sind die mit 1, 2, 3, 4 u. s. w. bezeichneten Punkte erhalten worden, über welche die Schraubenlinie in Fig. 21 gezogen wurde.

Der Theil der Schraubenlinie, welcher auf der vorderen Hälfte des Cylinders liegt, ist ausgezogen, der auf die hintere Seite des Cylinders fallende Theil der Schraubenlinie ist dagegen punktirt.

Zur Uebung construiren man für einen Cylinder von gleichem Durchmesser, wie den in Fig. 21, eine Schraubenlinie, für welche die Höhe eines Schraubenganges 24, und eine zweite, für welche die Höhe eines Schraubenganges nur 6 Millimeter beträgt.

In Fig. 22 ist auf dem Umfang eines Cylinders, dessen Durchmesser grösser ist als der Tab. XXXIII des Cylinders Fig. 21, eine Schraubenlinie construirt, für welche die Höhe eines Schraubenganges gleichfalls 12 Millimeter beträgt, welche aber nicht im vordersten Punkte a des Grundkreises, sondern im hintersten Punkte g desselben beginnt. Fig. 22.

Scharfe und flache Schraubengewinde. Denken wir uns an die Linie rs , Fig. 21, 35 welche zwei in vertikaler Richtung um die Höhe eines Schraubenganges von einander entfernte Punkte r und s der Schraubenlinie verbindet, ein gleichschenkeliges Dreieck rst ($rt = st$) so angesetzt, dass seine verlängerte Ebene durch die Axe des Cylinders geht (dass also dieses Dreieck im Grundriss als Verlängerung eines Radius erscheint), so wird ein scharfes Schraubengewinde entstehen, wenn man das Dreieck rst in der Weise um den Cylinder herumführt, dass r und s auf der in Fig. 21 verzeichneten Schraubenlinie fortgeführt werden, während die Ebene des Dreiecks stets gegen die Cylinderaxe gerichtet bleibt. — Bei der eben bezeichneten Fortbewegung des Dreiecks rst beschreibt der Punkt t gleichfalls eine Schraubenlinie, für welche die Höhe eines Schraubenganges ebenso gross ist, wie für die Schraubenlinie, an welcher die Punkte r und s herumgeführt werden. In unserem Falle beträgt also die Höhe eines Schraubenganges für die durch den Punkt t beschriebene Schraubenlinie gleichfalls 12 Millimeter.

Der Radius des Cylinders in Fig. 22 ist gleich dem Abstand des Punktes t , Fig. 21, von der Axe des Cylinders in Fig. 21, also gleich der Länge tu ; folglich ist auch die in Fig. 22 construirte Schraubenlinie gleich derjenigen, welche den Punkt t bei der besprochenen Fortbewegung des Dreiecks rst in Fig. 21 beschreibt.

Um das scharfe Schraubengewinde selbst darzustellen, stelle man in einer und derselben Figur die Schraubenlinie Fig. 21 und die Schraubenlinie Fig. 22 concentrisch zusammen, wie dies in Fig. 23, Tab. XXXIII geschehen ist, d. h. für eine und dieselbe Axe eine Schraubenlinie von kleinerem und eine Schraubenlinie von grösserem Radius, in der Weise, dass die in gleicher Höhe liegenden Punkte den beiden Schraubenlinien diametral einander gegenüberstehen. So liegt z. B. der Punkt a der äusseren Schraubenlinie, Fig. 23, dem gleich hohen Punkte b der inneren Schraubenlinie diametral gegenüber; ebenso die beiden Punkte c und d , von denen der vordere c der äusseren, der hintere d der inneren Schraubenlinie angehört. Tab. XXXIII

Zur Vollendung der Zeichnung hat man nur noch Tangenten an je zwei benachbarte Wendestellen der inneren und äusseren Schraubenlinie zu legen, wie dies in unserer Figur geschehen ist. So ist z. B. eine Gerade gezogen, welche die äussere Schraubenlinie bei t , die innere bei s berührt; eine zweite Gerade berührt die äussere Spirale bei t , die innere bei r . Eine weitere Tangente ist von x nach y und eine von x nach z gelegt u. s. w.

Gehen wir nun zur Construction eines flachen Schraubengewindes über.

Man denke sich ein Rechteck $vxyz$, Fig. 21 (in dem hier gezeichneten Falle ist das Rechteck ein Quadrat), dessen Ebene vertikal steht, normal zu der Mantelfläche eines Cylinders an denselben, also so angesetzt, dass die verlängerte Ebene des Rechtecks durch die Axe des Cylinders geht. Dieses Rechteck werde nun so an dem Umfang des Cylinders herumgeführt, dass der Punkt v eine Schraubenlinie beschreibt, während die Ebene des Rechtecks $vxyz$ stets vertikal und zur Mantelfläche des Cylinders normal bleibt, so wird auch der Punkt z eine Schraubenlinie beschreiben, welche der von v beschriebenen gleich und mit ihr parallel ist. Gleichzeitig beschreibt aber auch x sowohl wie y eine Schraubenlinie. Diese von x und y beschriebenen Schraubenlinien sind nun gleichfalls unter einander gleich und parallel, sie gehören aber dem Umfang eines Cylinders von grösserem Durchmesser an, als die von v und z beschriebenen.

Die Höhe eines Schraubenganges ist für alle die vier eben besprochenen Schraubenlinien gleich und zwar wenn der Punkt v längs der in Fig. 21 verzeichneten Schraubenlinie hergeführt wird, gleich 12 Millimeter.

Tab. XXXIV Fig. 24 auf Tab. XXXIV stellt das flache Schraubengewinde dar, welches entsteht, wenn das Quadrat $vxyz$, Fig. 21, in der erwähnten Weise um den Cylinder herumführt. Um diese Zeichnung einzuführen, muss man zunächst, auf dieselbe Cylinderaxe bezogen, die vier Schraubenlinien construiren, welche durch die Punkte v, x, y und z beschrieben werden. Wie diese Construction mit möglichster Genauigkeit auszuführen ist und wie man zu verfahren hat, um bei der grossen Anzahl von Constructionspunkten eine leicht eintretende Verwirrung

Tab. XXXIV zu vermeiden, ist in Fig. 25, Tab. XXXIV angedeutet.

Fig. 25.

Nachdem man im Grundriss die beiden Kreise gezogen hat, welche die Basis der Cylinder darstellen, auf deren Umfang die beiden vertikalen Seiten vz und xy des Quadrats $vxyz$, Fig. 21, sich fortbewegen, werden dieselben in der bekannten Weise in zwölf gleiche Theile getheilt und die den Theilpunkten entsprechenden Vertikalen in Aufriss gezogen. Zur besseren Unterscheidung sind in unserer Figur die Vertikalen, welche den Theilpunkten des äusseren Kreises entsprechen, ganz ausgezogen, während die den Theilpunkten des inneren Kreises entsprechenden Vertikalen nur punktirt sind.

Zu beiden Seiten werden dann im Aufriss die Vertikalen AB und CD , Fig. 25, gezogen, auf jeder derselben von der Grundlinie anfangend eine Reihe von Punkten markirt, von denen jeder um $\frac{1}{12}$ der Höhe eines Schraubenganges (in unserem Beispiel also 1 Millimeter) von dem andern entfernt ist, und dann die correspondirenden Punkte auf beiden Seiten durch Horizontallinien verbunden. Von diesen Horizontallinien liegt also jede um $\frac{1}{12}$ der Höhe eines Schraubenganges (in unserer Figur 1 Millimeter) über der nächst unteren.

Die einzelnen Punkte, über welche die zu construiren Schraubenlinien zu ziehen sind, liegen nun auf der Durchschneidung dieser Horizontalen mit den entsprechenden, durch die Theilpunkte der Grundrisskreise gezogenen Vertikalen.

Lassen wir die eine der vier Schraubenlinien im Punkte a der Basis des inneren Cylinders beginnen, so sind die Punkte, durch welche diese Schraubenlinie zu ziehen ist, diejenigen, welche in Fig. 25 durch ein kleines Kreischen ($\circ$) bezeichnet sind. Es ist dies die Schraubenlinie, an welcher der Punkt v , Fig. 21, fortgeschoben ist.

Die Schraubenlinie, welche der Punkt x bei der besprochenen Fortbewegung des Vierecks $vxyz$ beschreibt, geht durch die Punkte, welche in Fig. 25 durch einen kleinen schwarzen Fleck ($\bullet$) bezeichnet sind.

Nehmen wir an, dass die Höhe des Vierecks $vxyz$, Fig. 21, also die Länge vz oder xy gleich ist der halben Höhe eines Schraubenganges, wie dies in der That bei der in Fig. 24 dargestellten Schraube der Fall ist, so muss, wenn der Punkt v , Fig. 21, auf der dort gezeichneten Schraubenlinie fortgeschoben wird, der Punkt z in g die Basis des Cylinders erreichen. Der Punkt g auf der hinteren Seite der Basis des inneren Cylinders ist es also, welcher als Ausgangspunkt für die Construction der durch den Punkt z beschriebenen Schraubenlinie genommen werden muss. Demnach geht die vom Punkte z beschriebene Schraubenlinie durch die in Fig. 25 durch ein einfaches Strichlein ($\diagup$) bezeichneten Punkte.

Die durch den Punkt y beschriebene Schraubenlinie endlich geht durch die mittelst eines liegenden Kreuzchens ($\times$) bezeichneten Punkte.

Hat man nun über die entsprechenden Punkte die vier Schraubenlinien gezogen, so bleibt zur Vollendung des Aufrisses der Schraube nur noch übrig, auf der durch k' sowohl als auf der durch d' gehenden Vertikalen allemal die Stücke auszuziehen, welche von einem der durch ein kleines Fleckchen ($\bullet$) bezeichneten Punkte zu dem nächst tieferen durch ein Kreuzchen ($\times$) bezeichneten geht, also die Stücke no , pq u. s. w. auf der einen und rs , tu u. s. w. auf der andern Seite, während dagegen die zwischenliegenden Stücke der Vertikalen, wie op , st u. s. w. unausgezogen bleiben.

Von den durch die Punkte k und d gehenden vertikalen Gränzlinien des inneren Cylinders sind nur diejenigen Stücke auszuziehen, welche nicht durch den bei der Fortbewegung des Quadrats $vxyz$ gebildeten, als eine auf dem inneren Cylinder aufsitzende Hervorragung erscheinenden Körper verdeckt werden, wie man dies in Fig. 24 am besten ansehen kann, in welcher dies alles ausgeführt ist.

Um eine Ueberladung der Zeichnung zu vermeiden, sind in Fig. 24 nur die vorderen sichtbaren Stücke der Schraubenlinien ausgezogen worden, die verdeckten hinteren Stücke aber, welche gewöhnlich nur punktirt werden, sind vollständig weggelassen worden.

Schraubenflächen. Eine Schraubenfläche entsteht, wenn eine gerade Linie, welche mit einer gegebenen Axe einen bestimmten, unverändert bleibenden Winkel macht, um diese Axe umgedreht, zugleich aber auch proportional dieser Drehung in der Richtung der Axe fortgeschoben wird. 36

In dem Folgenden wollen wir die Axe der Schraubenfläche als vertikal stehend annehmen, wie dies in Fig. 26, Tab. XXXIV und bei den Figuren auf Tab. XXXV wirklich der Fall ist. Tab. XXXIV

In Fig. 26 sei aa' eine gerade Linie, welche mit dem von a aus nach unten gerichteten Theil der vertikalen Axe st einen spitzen Winkel macht, so also, dass sie sich von a nach a' hin senkt. Da die vertikale Axe im Grundriss zum Punkt verkürzt erscheint, so fällt der auf der vertikalen Axe liegende Punkt a im Grundriss mit dem oberen Endpunkt dieser Axe zusammen, sa' des Grundrisses ist also die Horizontalprojection der Geraden aa' . Fig. 26.

Es soll nun die Gerade aa' in der Richtung des im Grundriss angebrachten Pfeils um die vertikale Axe gedreht werden, während sie sich stetig der Drehung proportional senkt und zwar in der Weise, dass der Winkel, den sie mit der vertikalen Axe macht, stets unverändert bleibt.

Bei Construction der Fig. 26 ist nun angenommen, dass bei einer Drehung von 30° ($\frac{1}{12}$ der ganzen Umdrehung) die Senkung der gedrehten Linie 2 Millimeter beträgt.

Wird also die Linie aa' um 30° gedreht, so dass sie im Grundriss in die Lage sb' kommt,

so kommt sie im Aufriss in die Lage bb' , welche dadurch bestimmt ist, dass b auf der vertikalen Axe st 2 Millimeter unter a , b' aber auf der durch b' des Grundrisses gezogenen Vertikalen 2 Millimeter tiefer als a' liegt.

Abermals um 30° gedreht, kommt die erzeugende Linie (*generatrix*) im Grundriss in die Lage sc' , im Aufriss in die Lage cc' ; der Punkt c liegt 2^{mm} unter b , c' des Aufrisses vertikal über c' des Grundrisses und 2 Millimeter unter b' .

Wird die erzeugende Linie im Grundriss bis sd' gedreht, so dass der Winkel $c'sd'$ gleich 30° ist und also sd' rechtwinkelig zur Grundlinie steht, so kommt sie im Aufriss in die Lage dd' , welche mit der Richtung der Axe zusammenfällt. Uebrigens ist d wieder 2 Millimeter tiefer als c , d' um 2 Millimeter tiefer als c' .

Kommt in dieser Weise fortschreitend die erzeugende Linie im Grundriss der Reihe nach in die Lagen se' , sf' , sg' , sh' u. s. w., von denen jede einen Winkel von 30° mit der nächst vorhergehenden und mit der nächst folgenden macht, so sind ee' , ff' , gg' , hh' die entsprechenden Lagen der erzeugenden Linie (der *generatrix*) im Aufriss. Die Punkte e , f , g , h u. s. w. liegen sämmtlich auf der Axe st der Schraubenfläche, jeder aber um 2 Millimeter unter dem vorhergehenden. Die Punkte e' , f' , g' , h' u. s. w. liegen vertikal über den gleichnamigen Punkten des Grundrisses, und zwar e' um 2^{mm} tiefer als d' , f' um 2^{mm} tiefer als e' , g' um 2^{mm} unter f' , h' um 2^{mm} unter g' u. s. w.

Die Punkte a' , b' , c' , d' , ... m' u. s. w. bilden eine Schraubenlinie, welche in Fig. 26 im Grund- und Aufriss dargestellt ist. Der Verlauf der Schraubenfläche ist in Fig. 26 dadurch angedeutet, dass die Lage der Generatrix für regelmässige Intervalle (einer Drehung von je 30° entsprechend) aufgetragen ist.

Die Durchschnittscurve der Schraubenfläche Fig. 26 mit einer horizontalen Ebene erscheint im Aufriss natürlich zur geraden Linie verkürzt, im Grundriss in ihrer wahren Gestalt.

Denken wir uns durch den Punkt a' eine horizontale Ebene AB gelegt, so schneidet diese die Gerade bb' in b'' , cc' in c'' , dd' in d'' , ee' in e'' und ff' in f'' . Hat man diese Punkte einmal im Aufriss markirt, so kann man sie auf die bekannte Weise leicht in den Grundriss heruntertragen und dann über die Punkte s , f'' , e'' , d'' , c'' und b'' nach a'' die verlangte Durchschnittscurve ziehen.

Der Punkt d'' kann im Grundriss nicht wie b'' , c'' , e'' und f'' durch Herabfallen eines Perpendikels von dem gleichnamigen Punkte des Aufrisses gefunden werden. Er ist nach dem in §. 72 besprochenen Verfahren zu ermitteln.

Um die in Fig. 26 construirte Schraubenfläche anschaulicher zu machen, ist dieselbe in Tab. XXXV Fig. 27, Tab. XXXV mit Hinweglassung aller Constructionslinien schattirt dargestellt.
Fig. 27.

Die Gestalt der Schraubenfläche ändert sich, einmal wenn der Winkel sich ändert, welchen die Generatrix mit der Axe macht, und dann wenn die Höhe des Schraubenganges geändert wird.

Zur Uebung construiren man:

1) eine Schraubenfläche, für welche der Winkel, welchen die Generatrix mit der Axe macht, derselbe ist wie bei der Schraubenfläche Fig. 26, während dagegen die Höhe eines Schraubenganges nur 12 Millimeter ist, also auf eine Drehung der Generatrix von 30° nur eine Senkung derselben von 1 Millimeter kommt;

2) eine Schraubenfläche, für welche die Höhe eines Schraubenganges 24 Millimeter beträgt, während der Winkel, welchen die Generatrix mit der Horizontalen macht, nur halb so gross ist, als bei der in Fig. 26 dargestellten Schraubenlinie.

Man construire ferner die Durchschnittscurve einer jeden dieser beiden Schraubenflächen mit einer horizontalen Ebene.

In Fig. 28, Tab. XXXV ist eine Schraubenfläche construirt, deren Generatrix von der Tab. XXXV Axe aus in die Höhe gerichtet ist und zwar so, dass der Winkel, welchen die Generatrix mit dem von a' , Fig. 28, nach oben gerichteten Theil der Axe macht, ebenso gross ist wie der Winkel, welche die Generatrix aa' , Fig. 26, mit dem von a nach unten gerichteten Theil der Axe macht. Die Höhe eines Schraubenganges beträgt für die in Fig. 28 construirte Schraubenfläche 24 Millimeter.

Um diese Schraubenfläche der Anschauung näher zu bringen, ist der obere Theil derselben im Aufriss schattirt.

Die Curve $sm'l'h'g$ im Grundriss ist die Durchschnittscurve der Schraubenfläche mit einer durch den Punkt g gelegten horizontalen Ebene.

Fig. 29 auf Tab. XXXV stellt eine Schraubenfläche dar, für welche die Höhe eines Schraubenganges gleichfalls 24 Millimeter beträgt, während die Generatrix rechtwinkelig zur Axe steht.

Das scharfe Schraubengewinde Fig. 23, Tab. XXXIII kann als die Combination zweier Schraubenflächen betrachtet werden, für welche die Höhe eines Schraubenganges gemeinschaftlich gleich 12 Millimeter ist, während die Generatrix der einen von der Axe an gerechnet, sich um einen ebenso grossen Winkel unter die Richtung der Horizontalen senkt, wie die Generatrix der anderen sich über dieselbe erhebt.

Die Fläche, welche die Linie vx , Fig. 24, beschreibt, wenn das Quadrat $vx yz$ in der früher besprochenen Weise um den inneren Cylinder herumgeführt wird, ist ein Theil der Schraubenfläche, welche durch eine rechtwinkelig auf der Axe stehende Schraubenfläche erzeugt wird. Dasselbe gilt auch von der durch die gerade Linie zy erzeugten Fläche.

TAFELN
ZUR
CONSTRUCTIVEN
ZEICHNUNGS-LEHRE.

ERSTER THEIL.

T A E B N

C O N S T R U C T I V E N

X E I C H N I N G S - T H E R E

E R R A T A

T A F E L N

ZUR

C O N S T R U C T I V E N

ZEICHNUNGS-LEHRE

VON

DR. JOH. MÜLLER,
Professor zu Freiburg im Breisgau.

ERSTER THEIL.

Z W E I T E A U F L A G E .

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1874.

T A F E L N

C O N T R A K T I V E N

ZEICHNUNGS-LEHRE

Die Herausgabe einer Uebersetzung in französischer und englischer Sprache,
sowie in anderen modernen Sprachen wird vorbehalten.

ERSTER THEIL

ERSTE AUFGABE

HAUPT-UNTERSUCHUNG

BEI DER ZEICHNUNG VON KÖRPERN UND DER GEGENSTÄNDEN

1874

ERSTES BUCH.

DARSTELLUNG DER RAUMGRÖSSEN
DURCH GRUND- UND AUFRISS.



DRITTES BUCH

DARSTELLUNG DER BAUINGESSEN

DERER GRUND- UND AUSSICHT



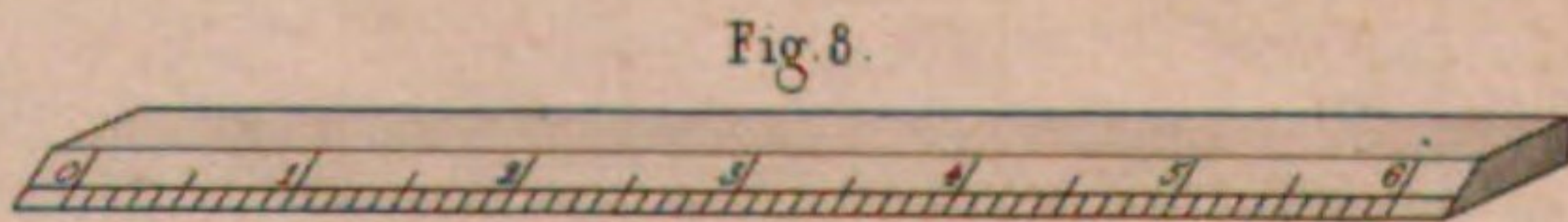
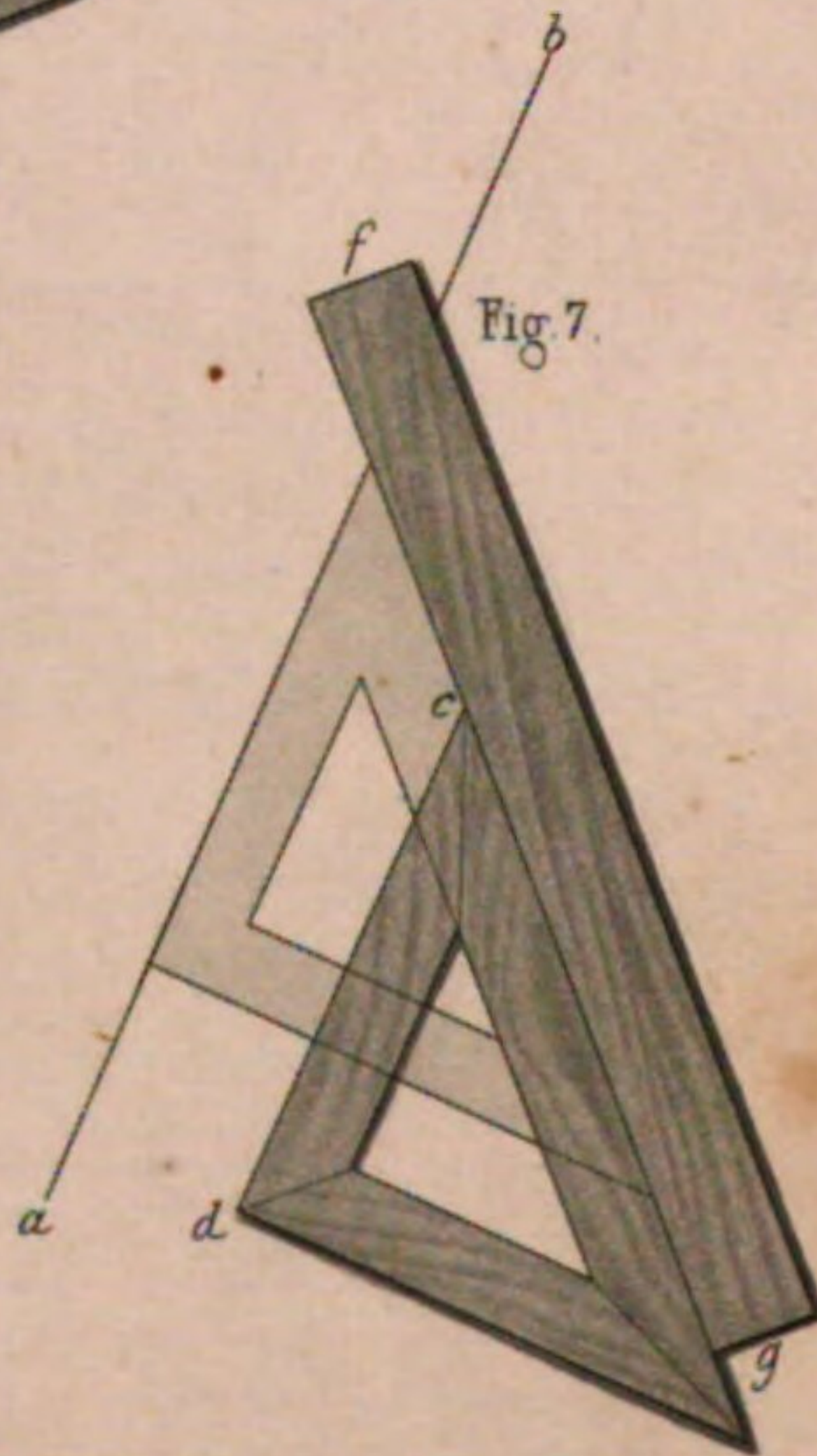
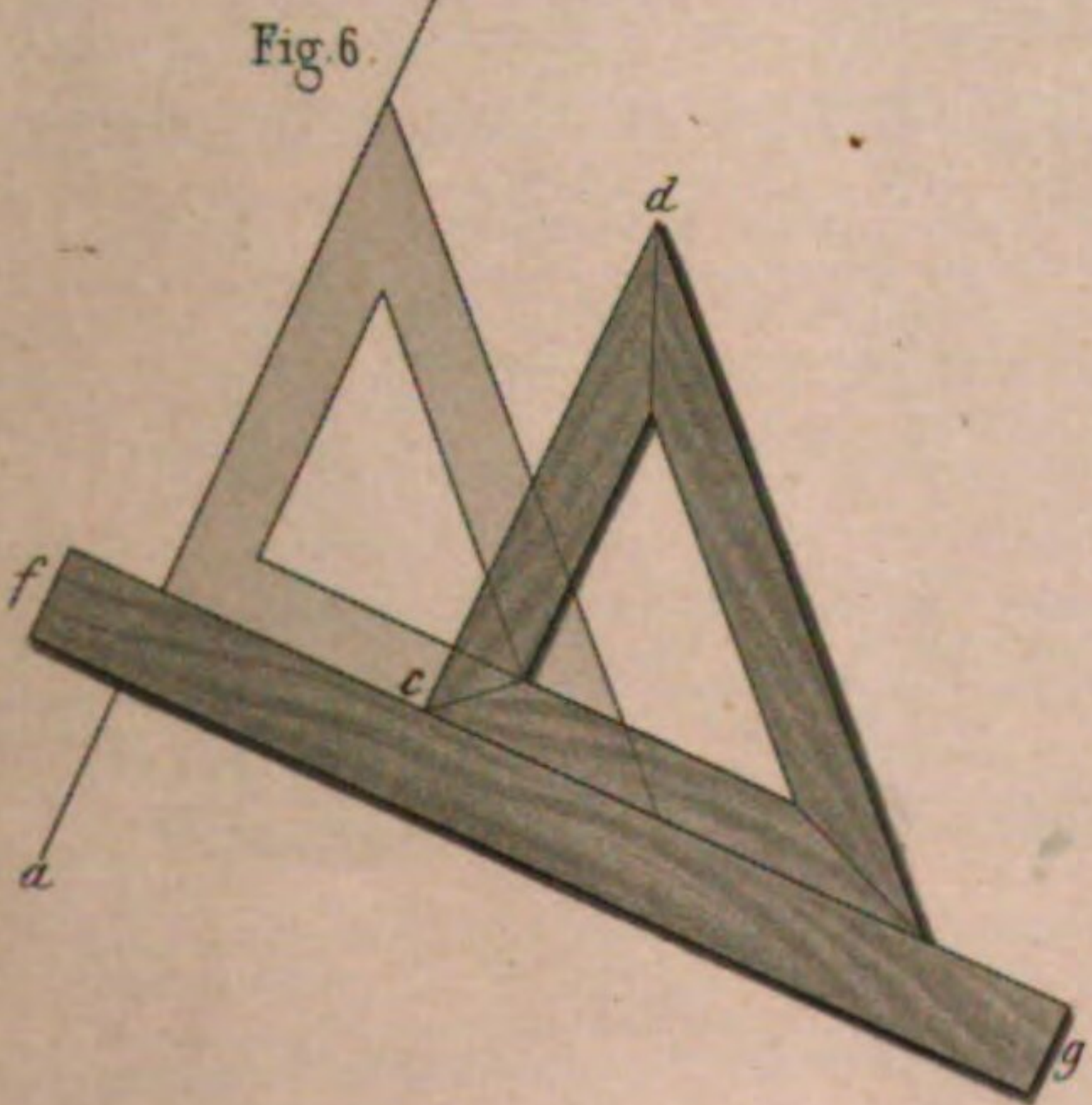
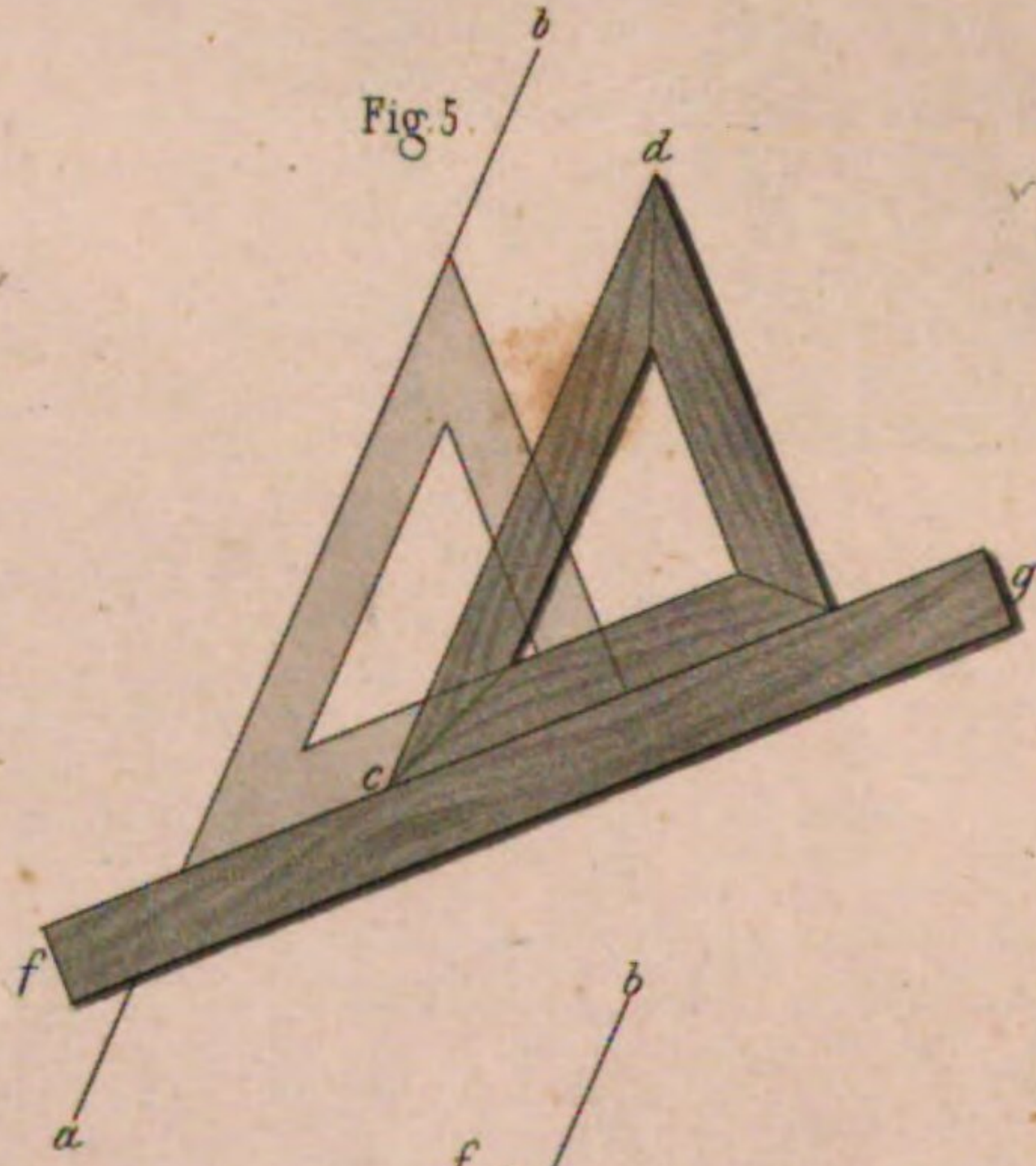
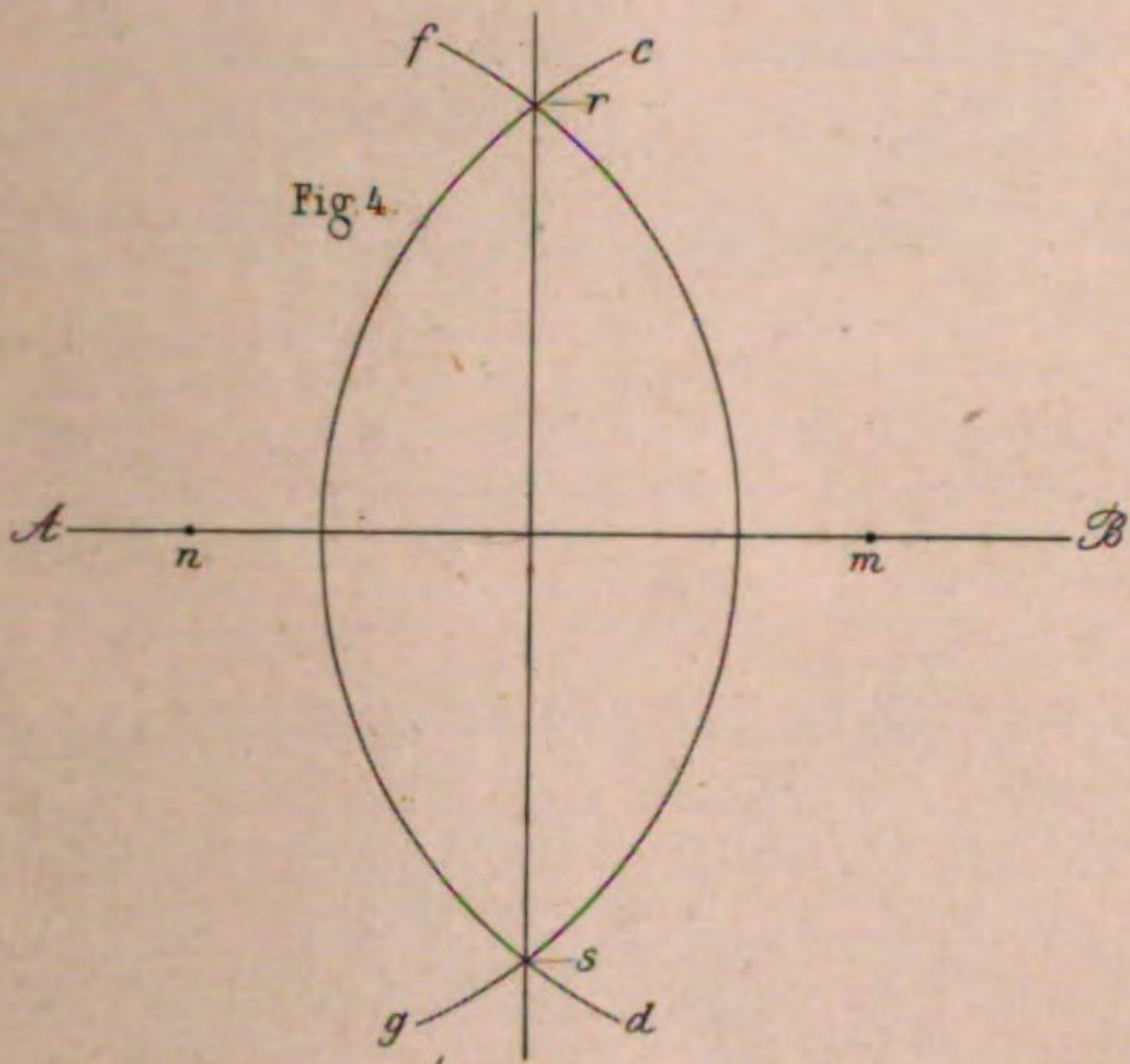
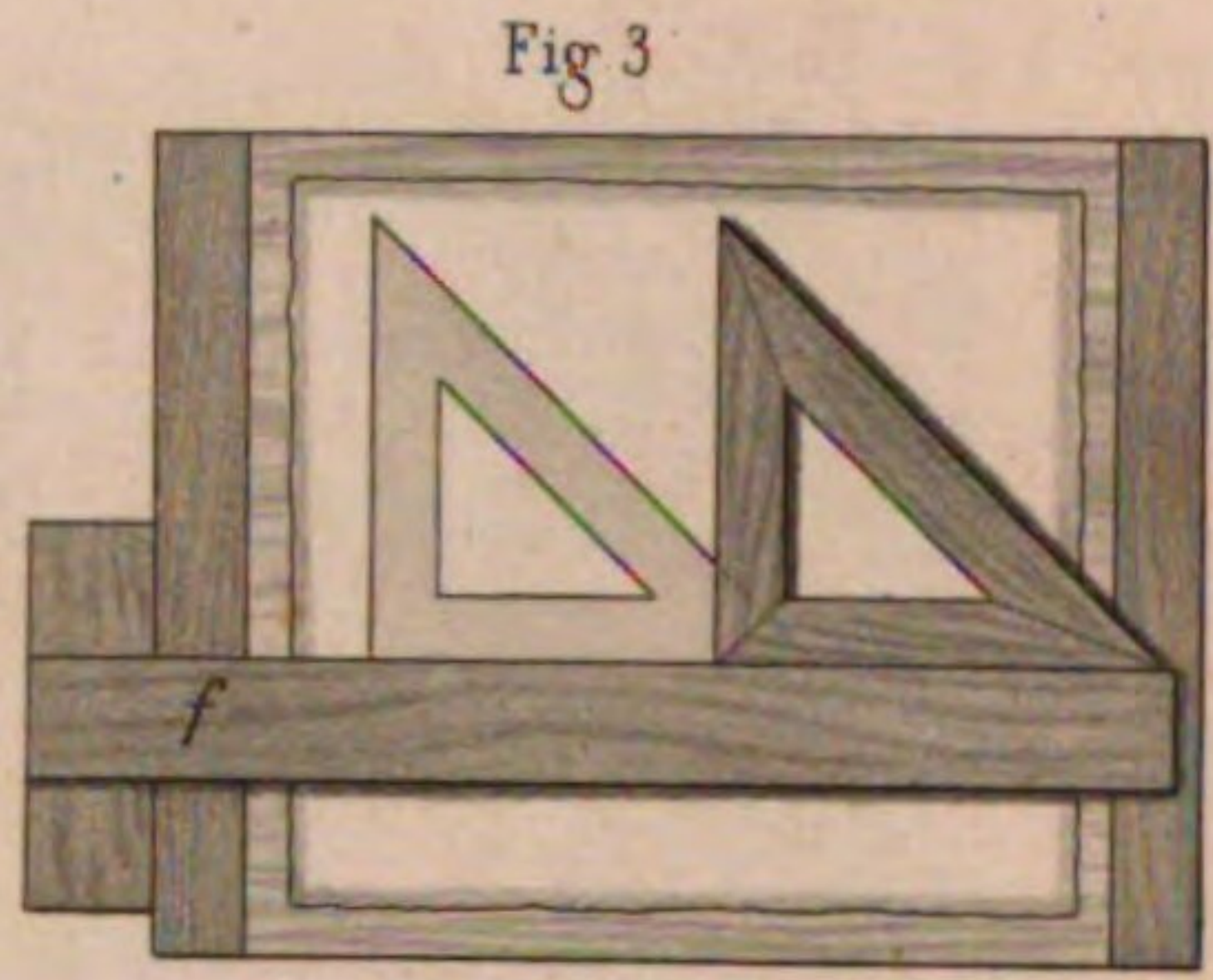
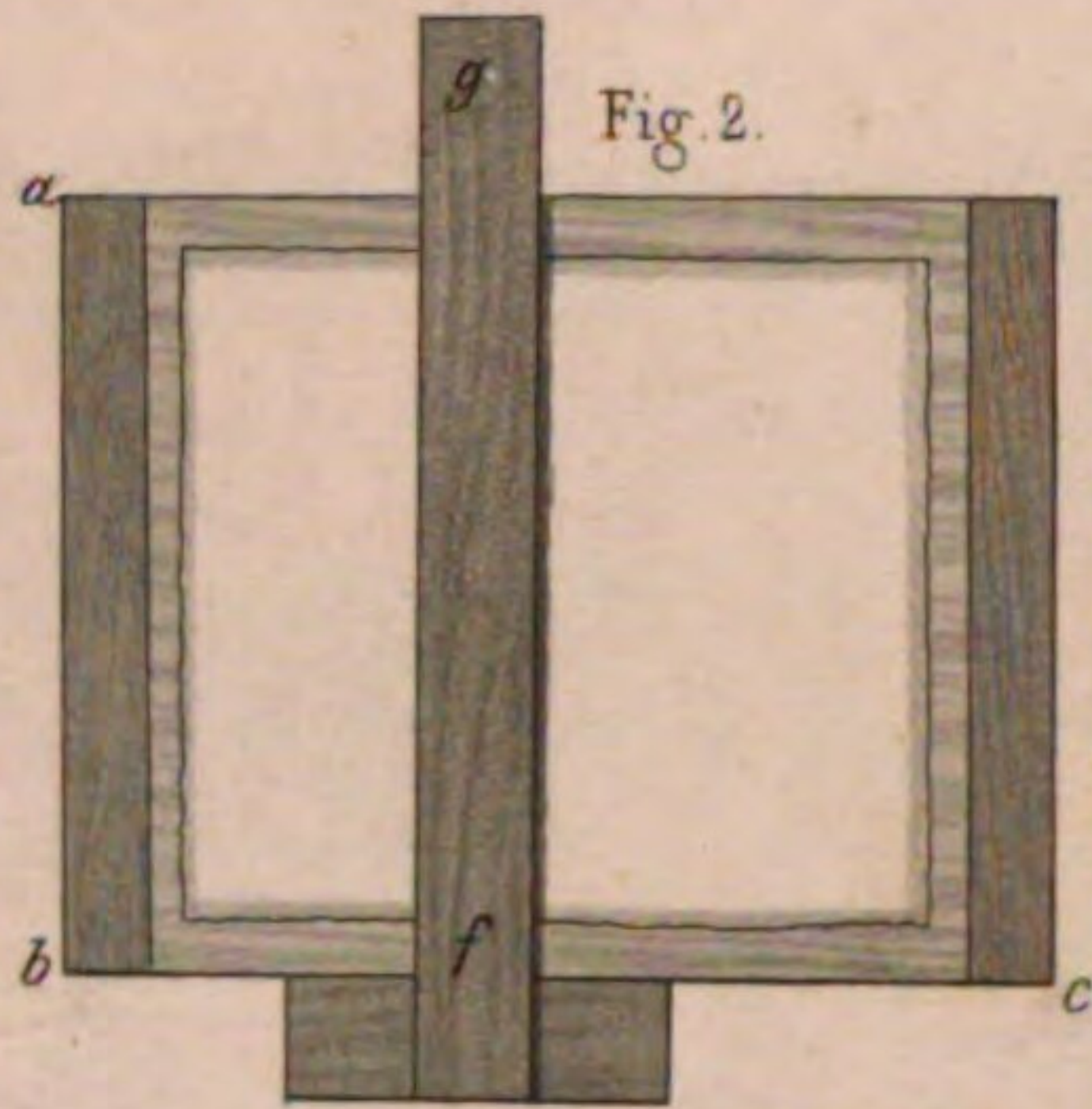
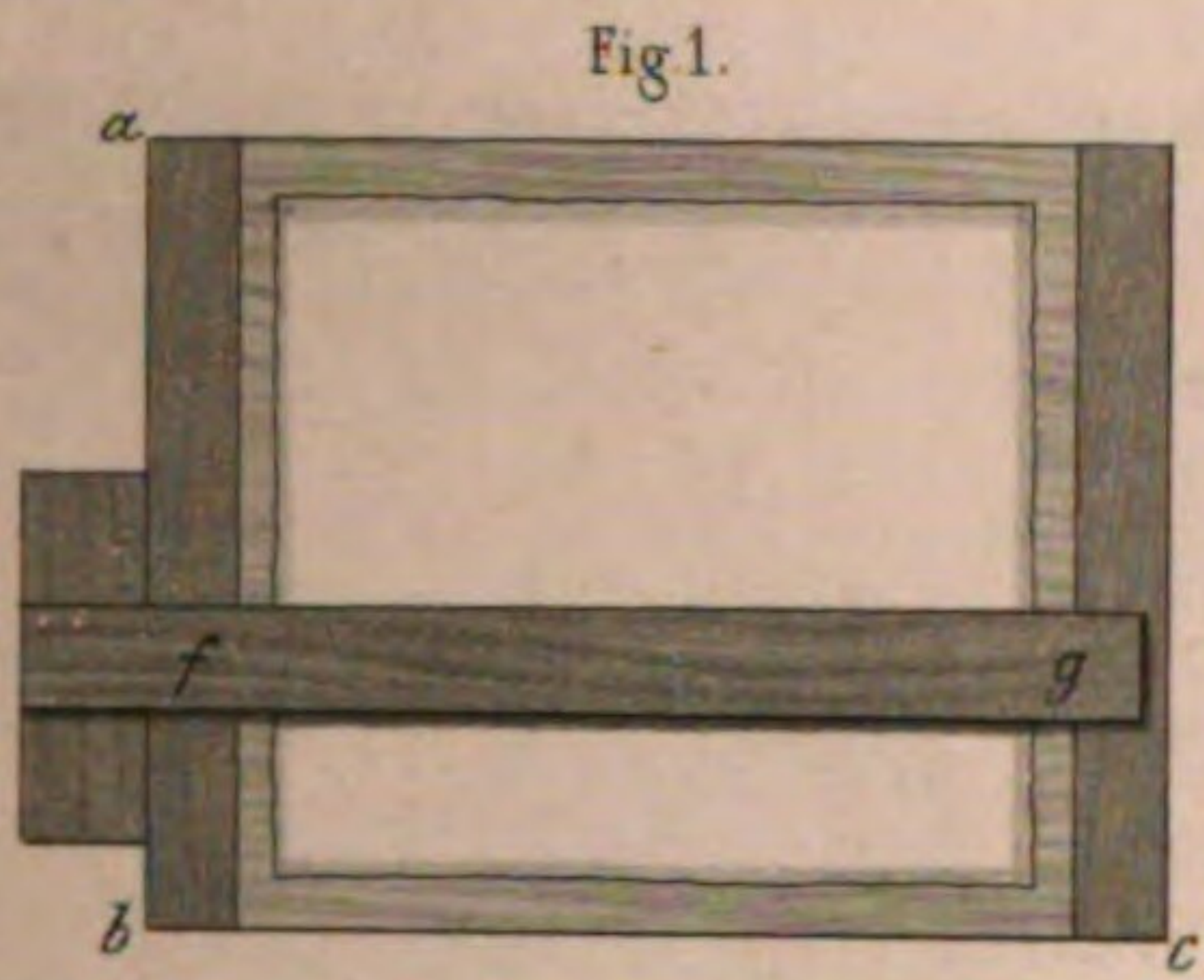


Fig. 1.

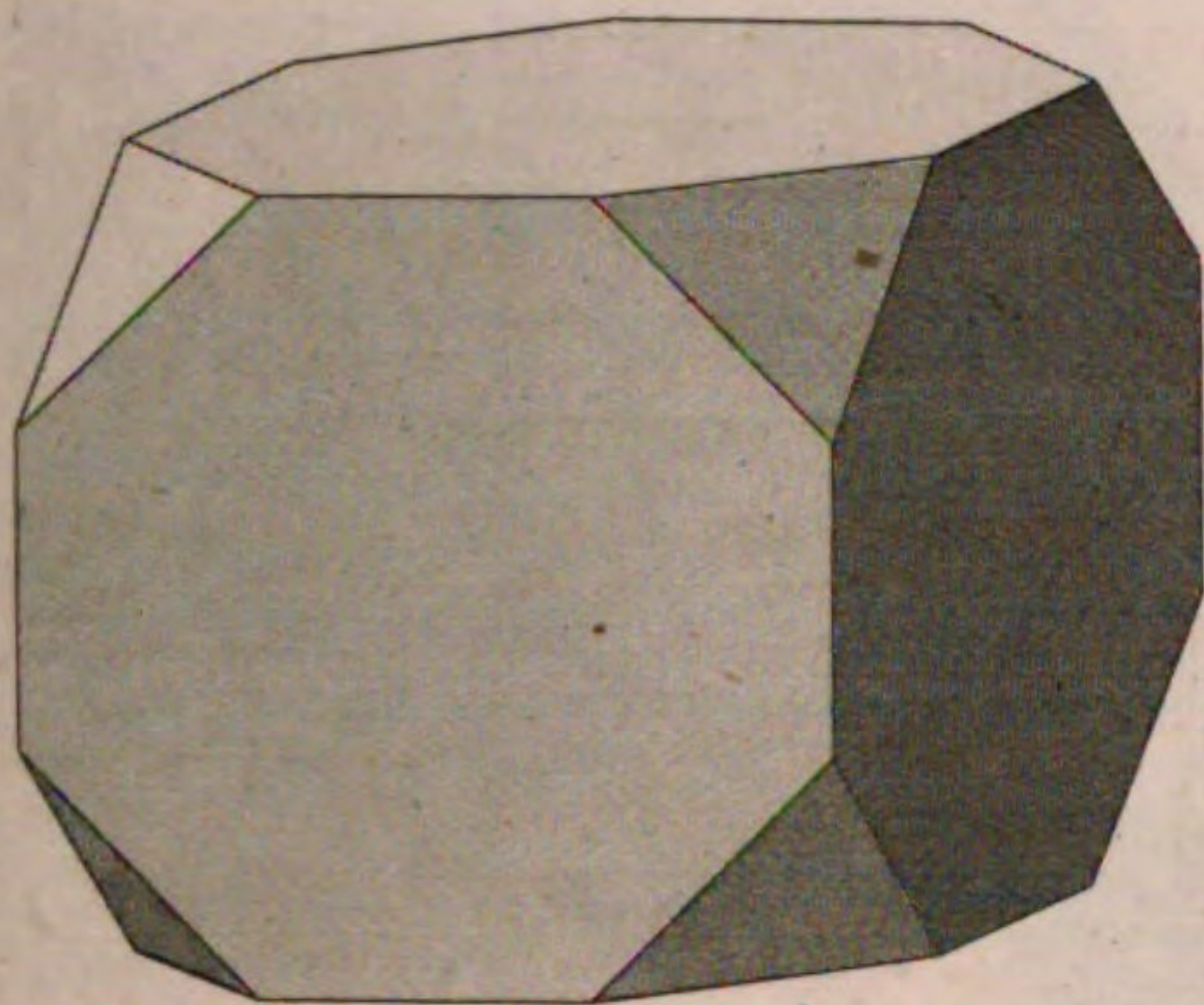


Fig. 2.

f d b a c e g h k m o n l i

Fig. 3.

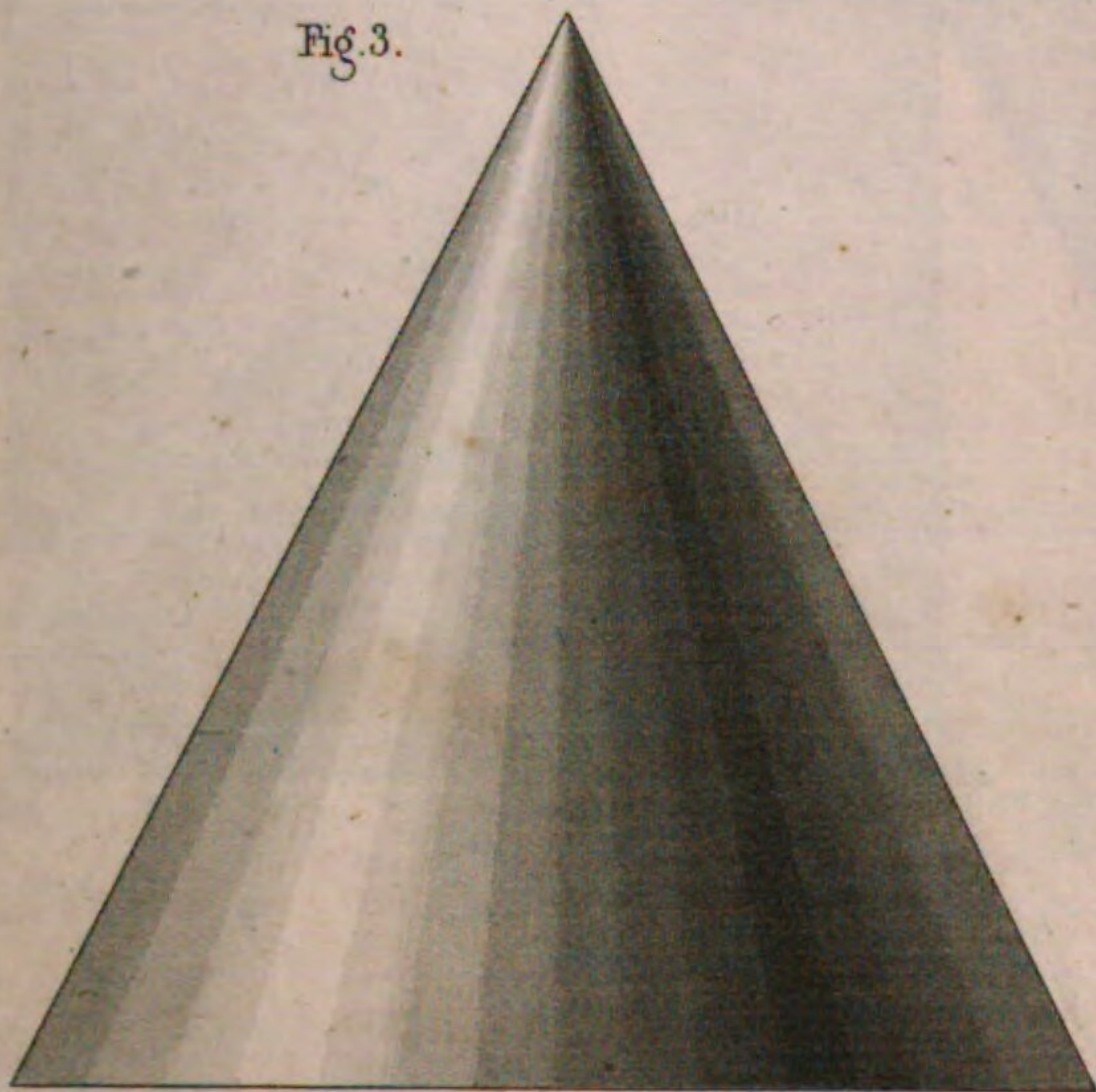


Fig. 4.

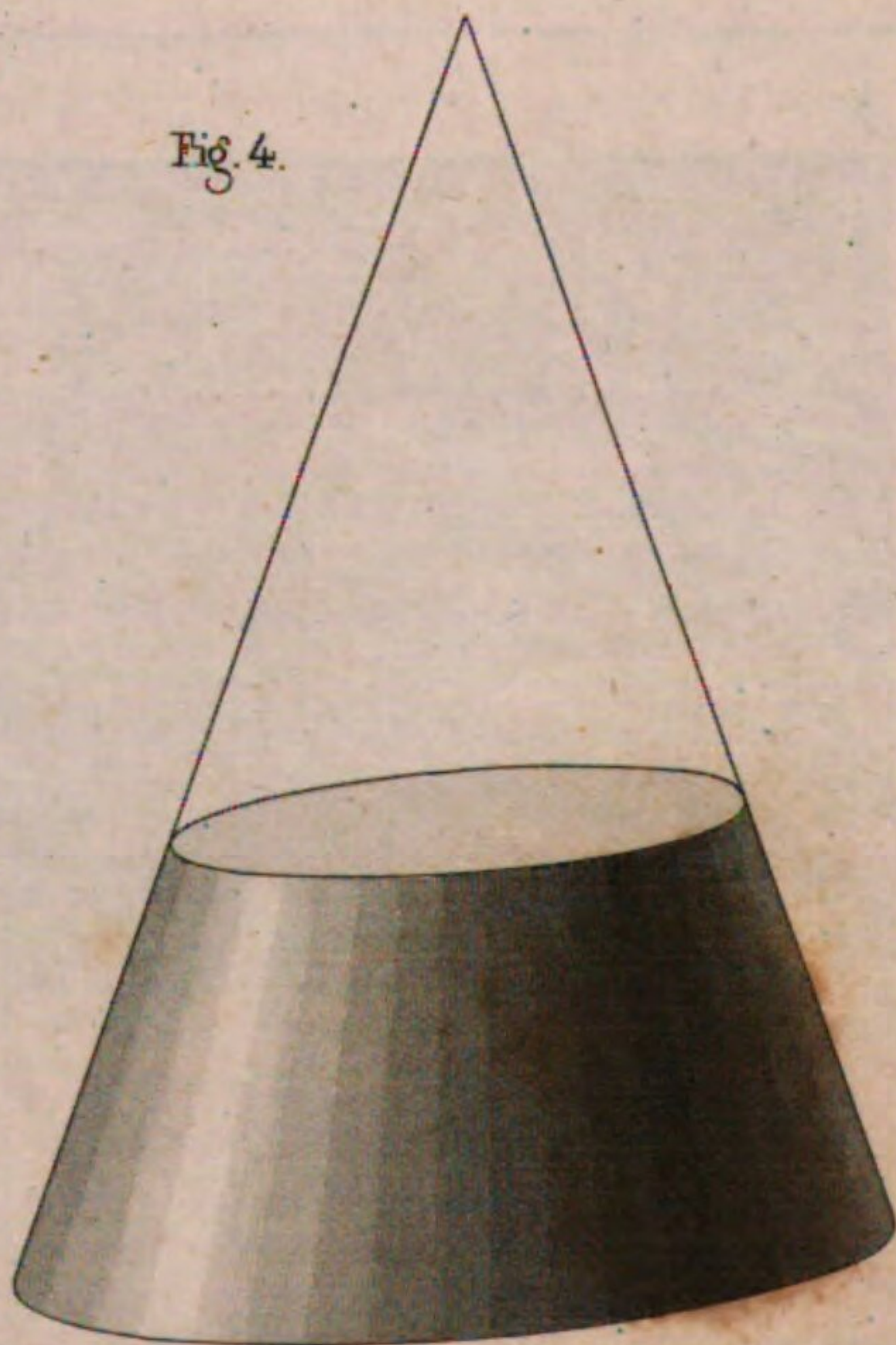




Fig. 1.

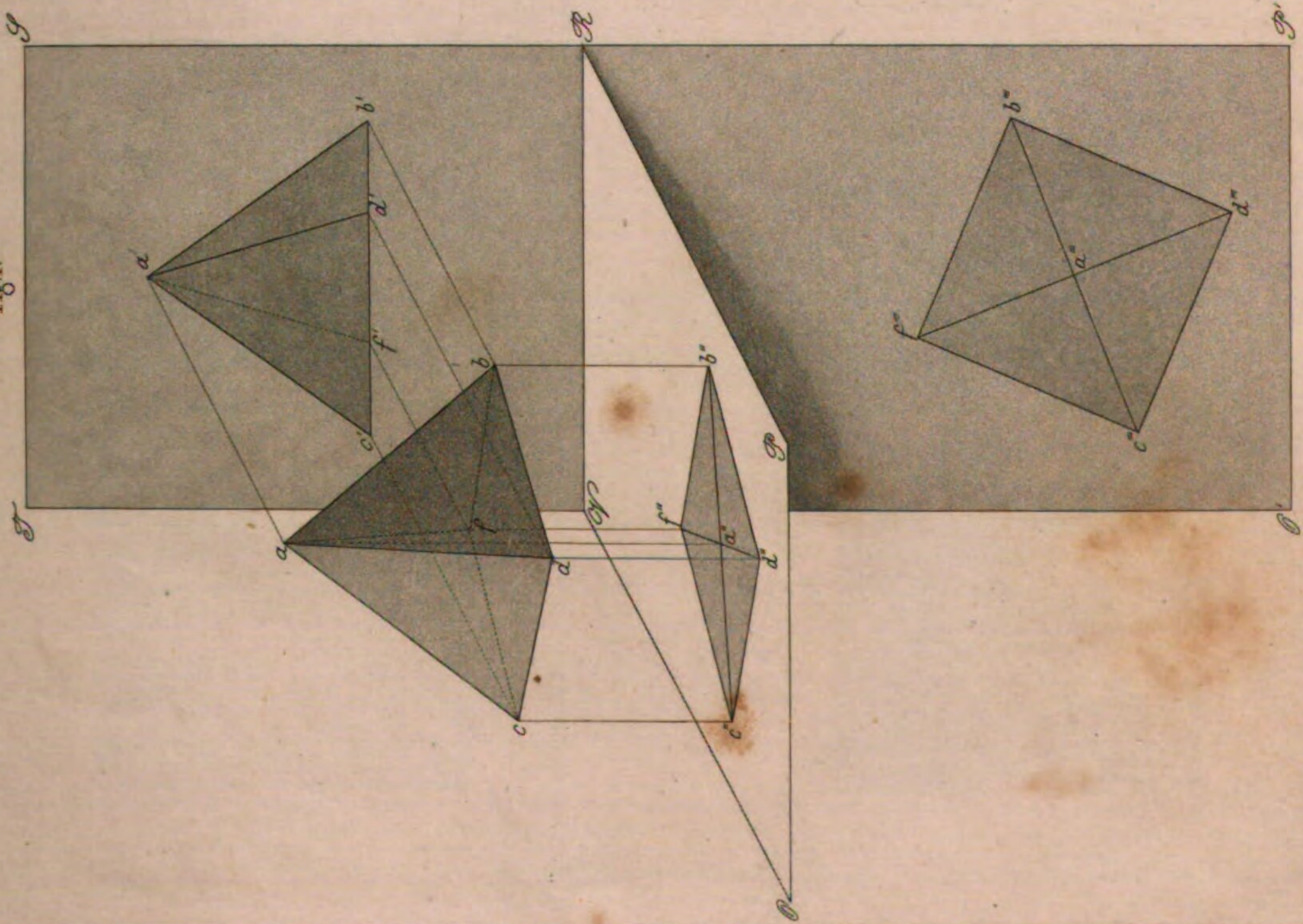


Fig. 2.

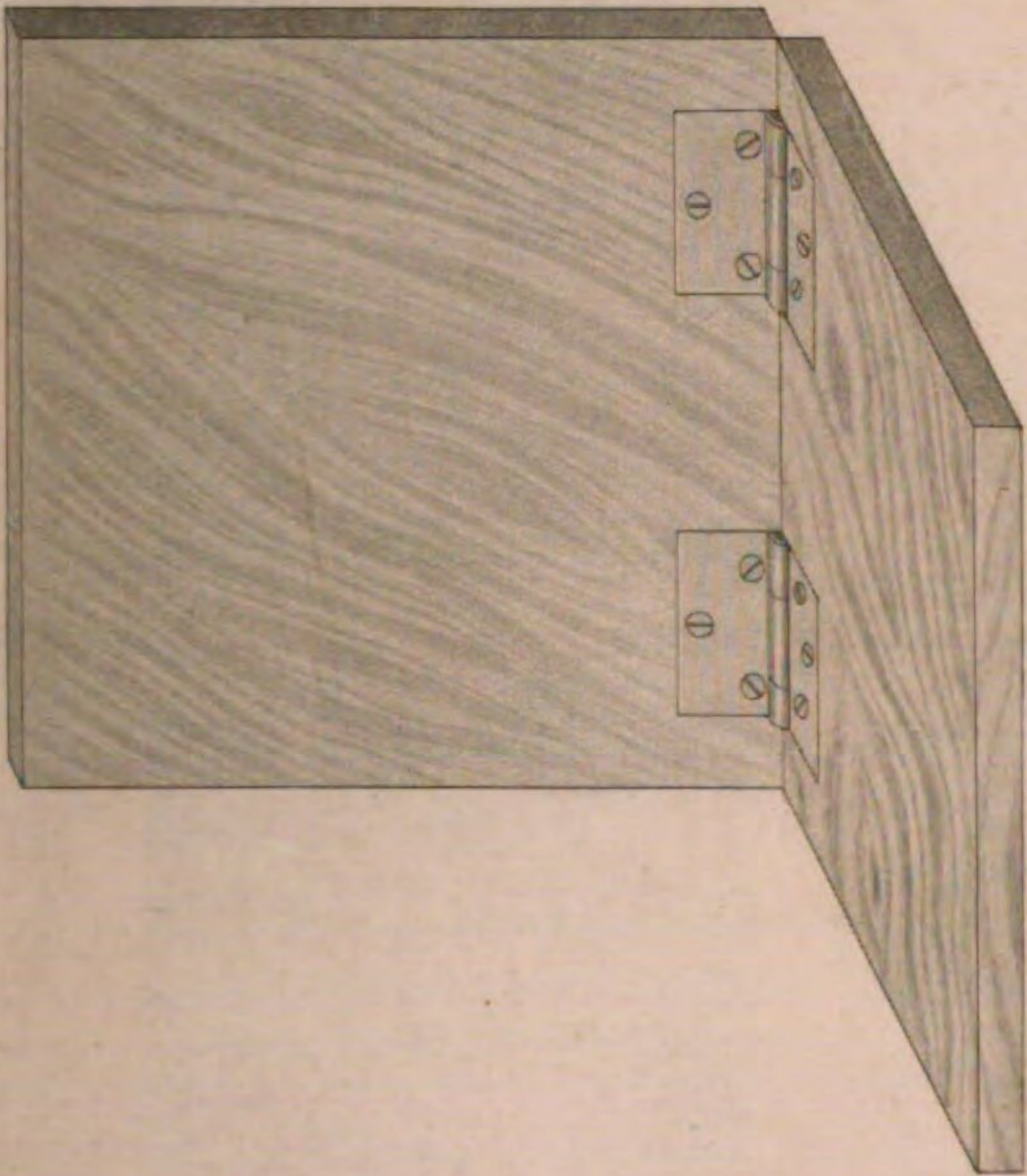


Fig. 3.

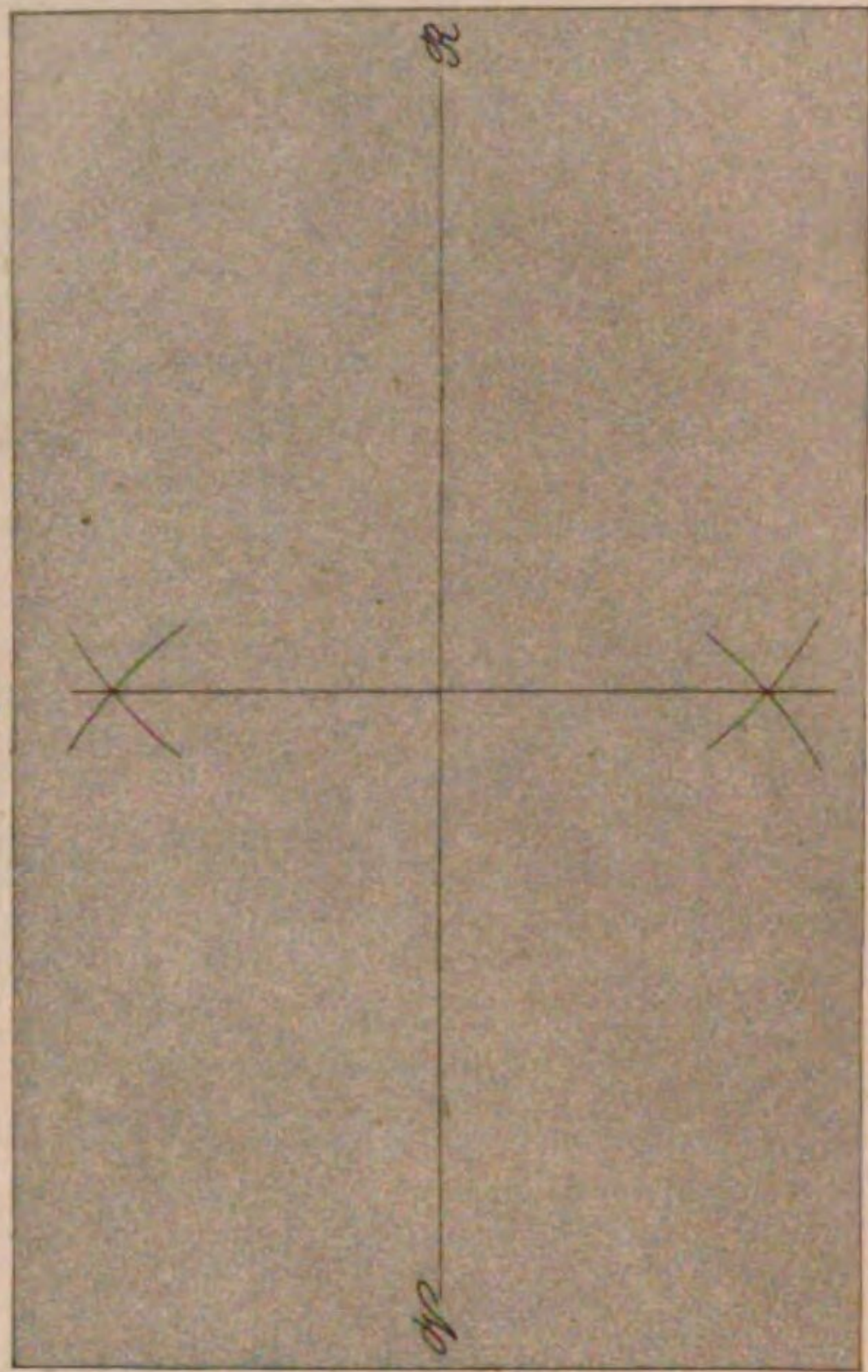


Fig. 5.

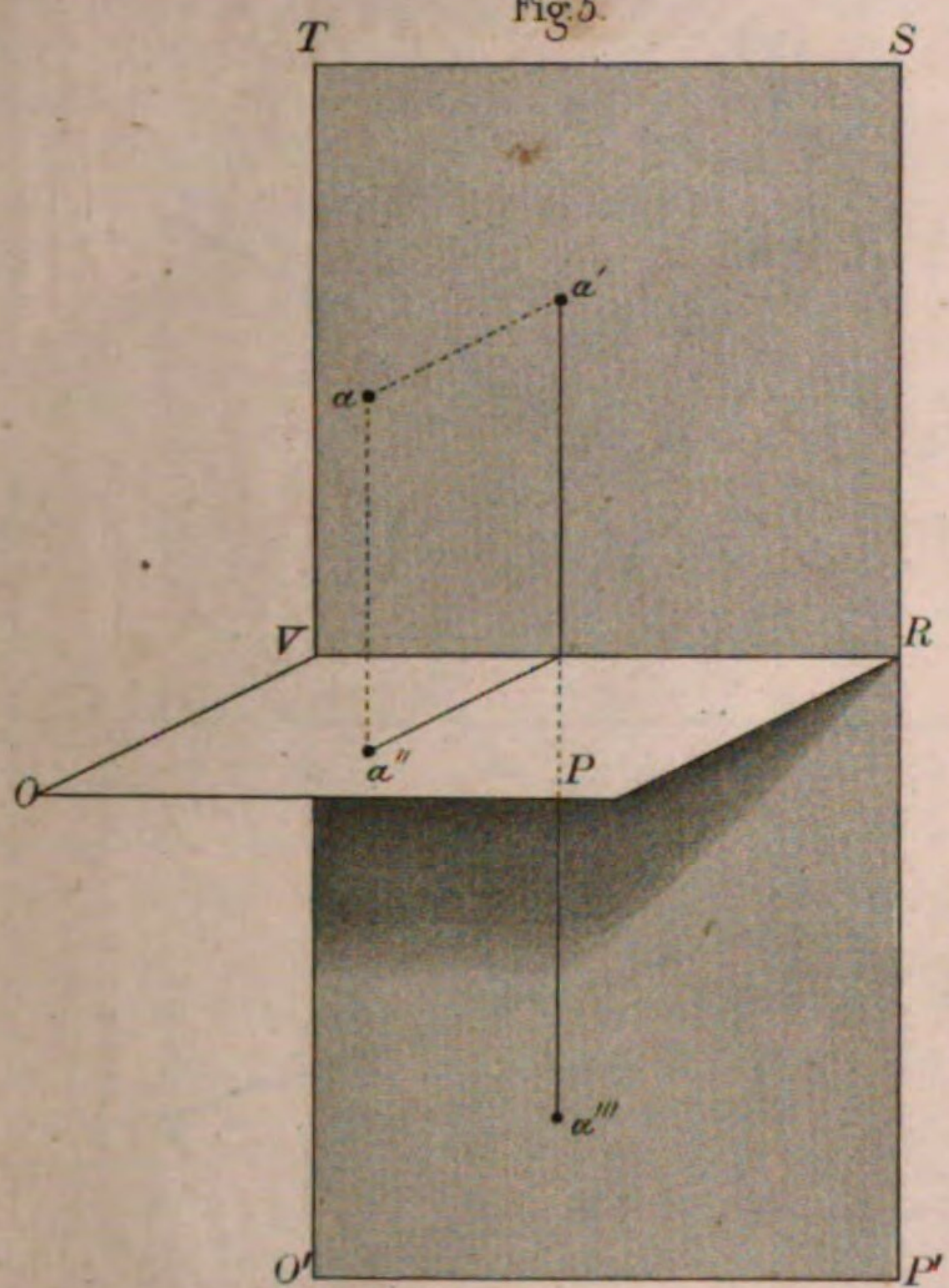


Fig. 6.

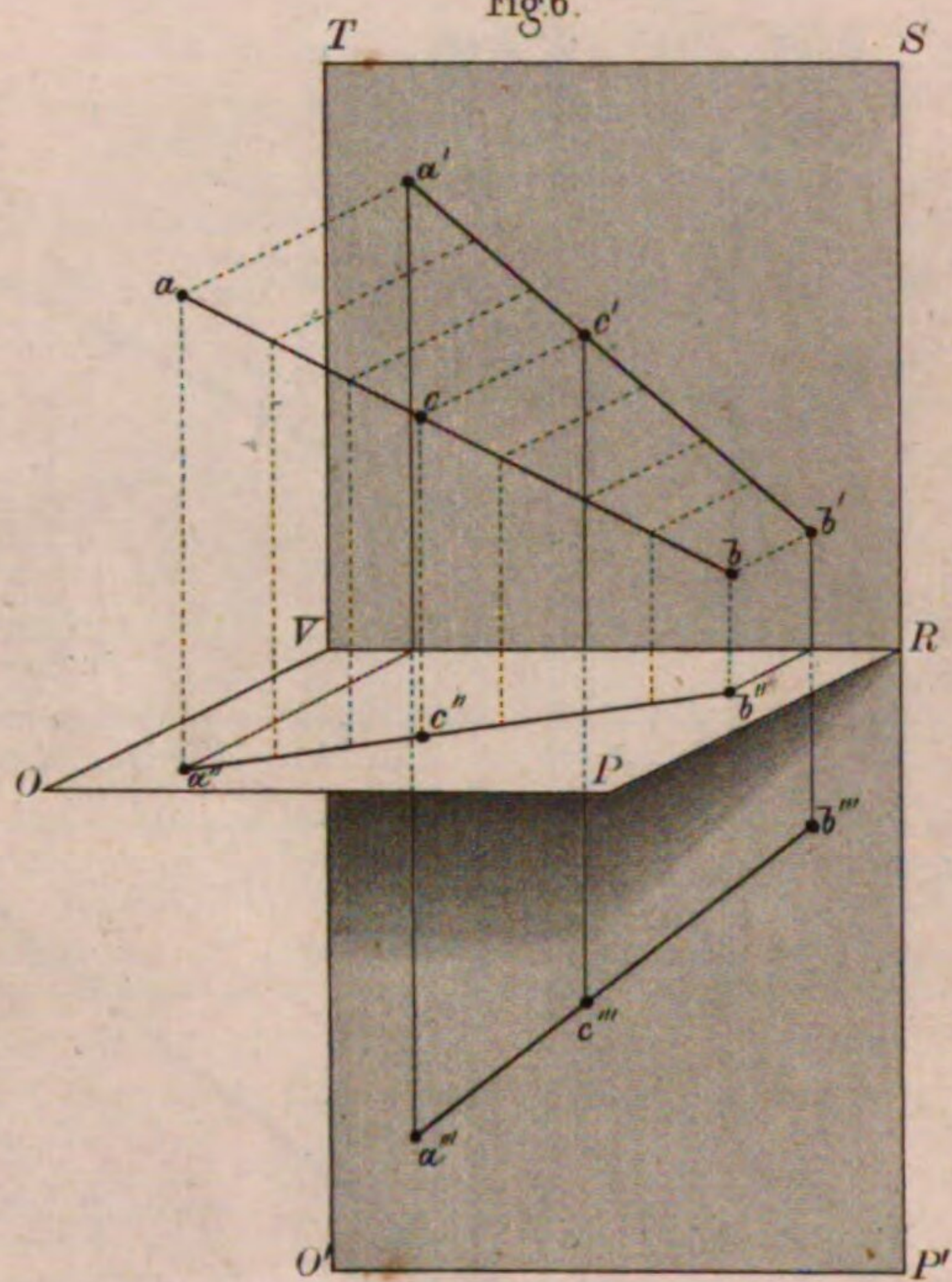


Fig. 7.

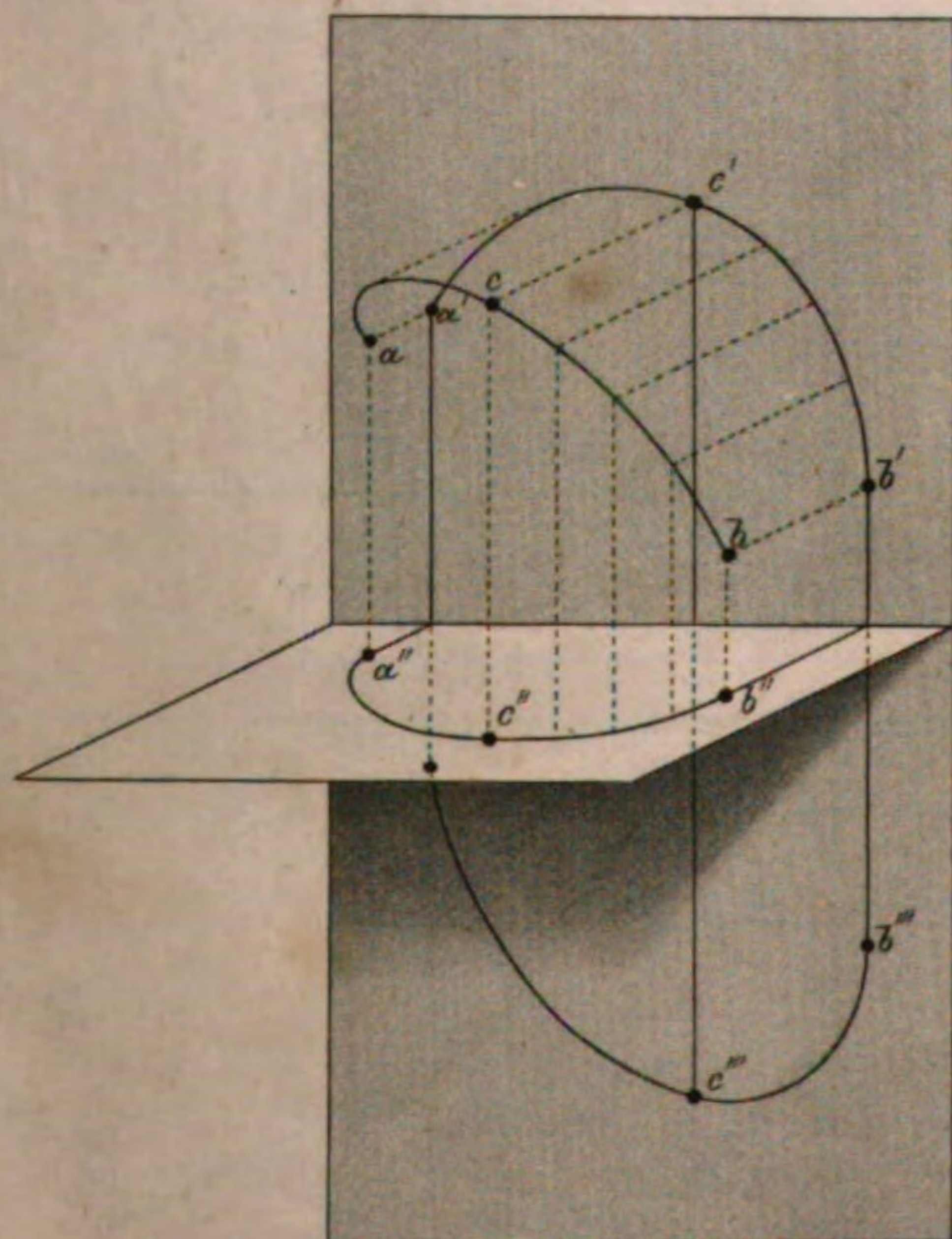
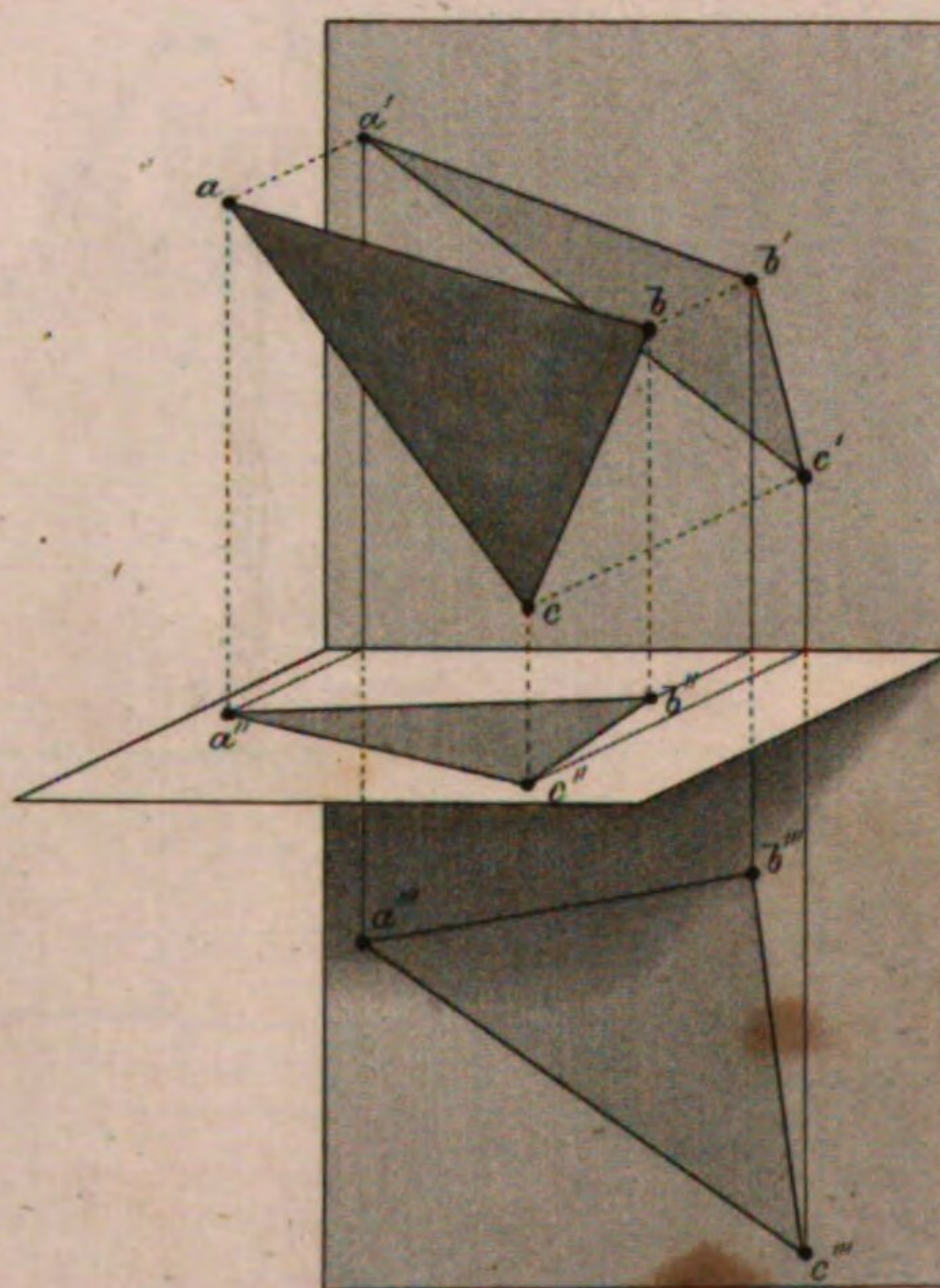


Fig. 8.



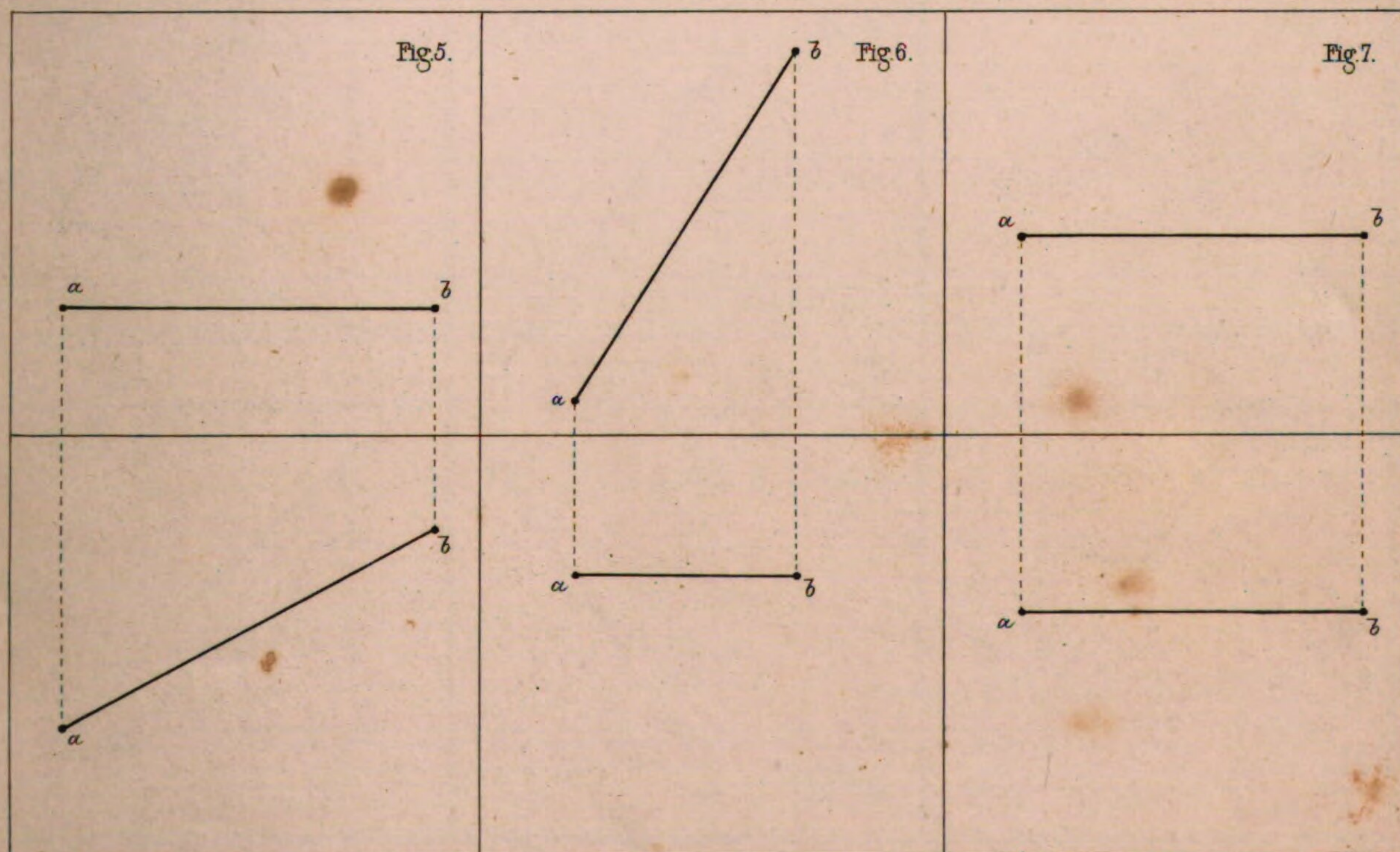
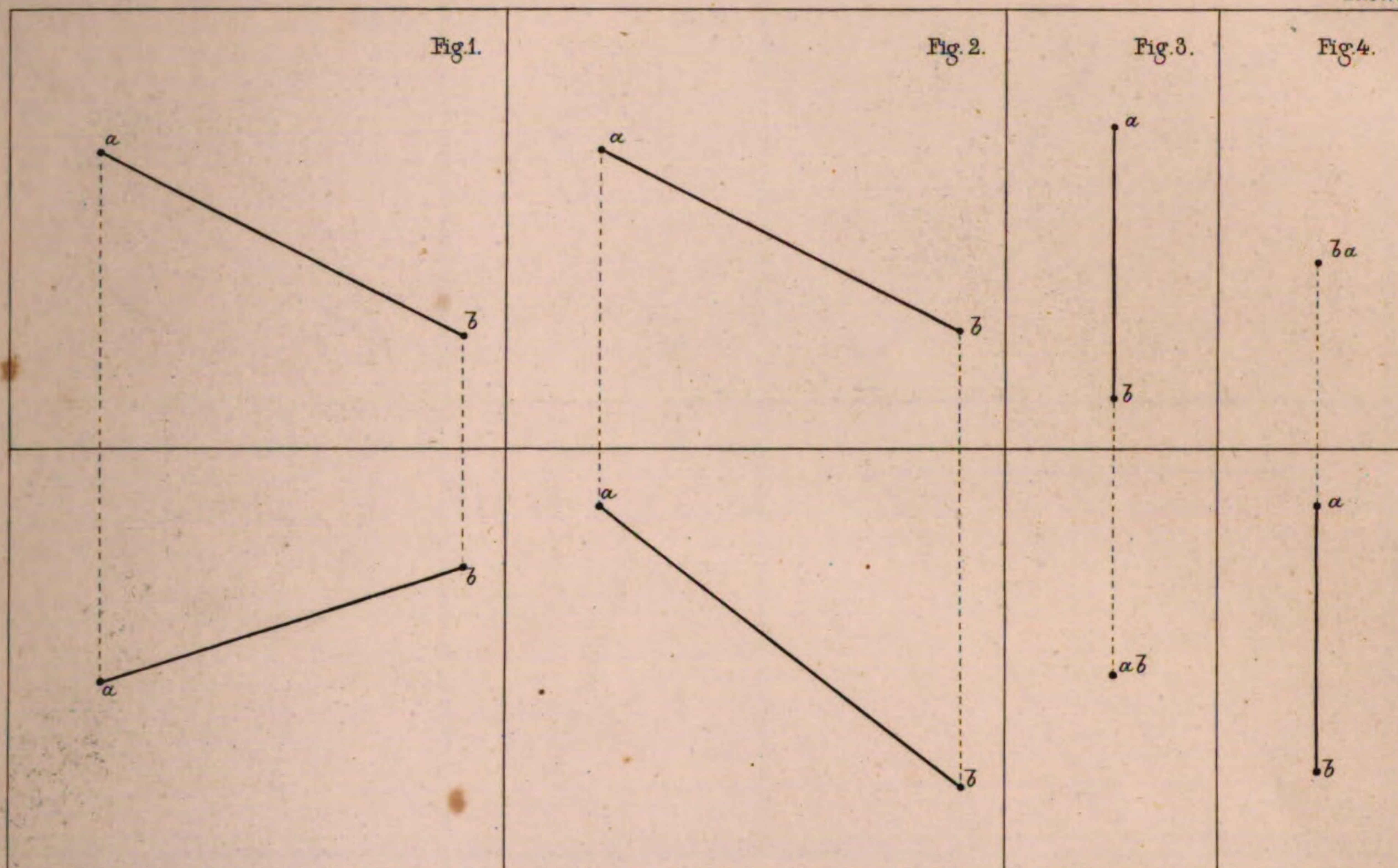


Fig. 8.

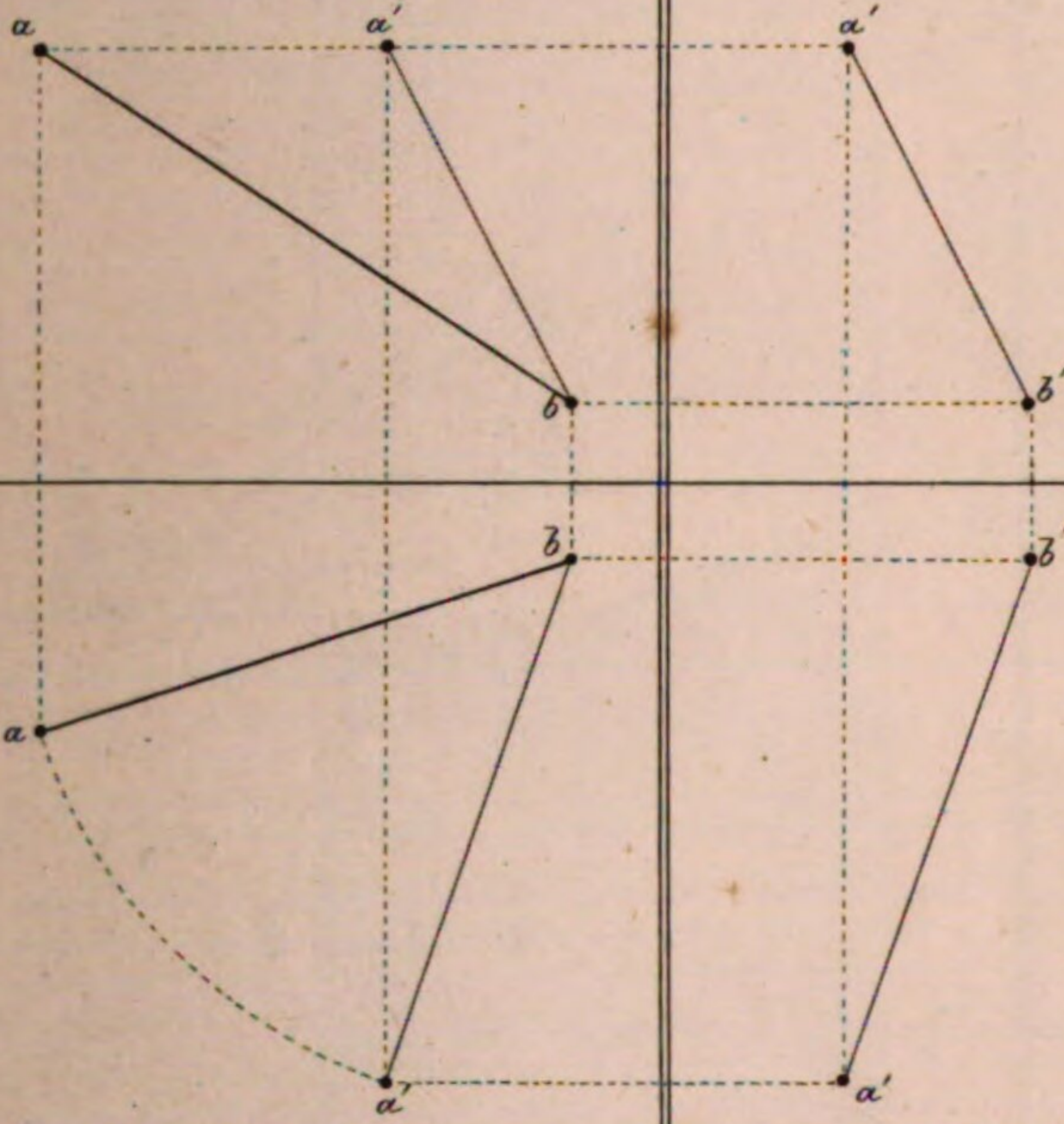


Fig. 9.

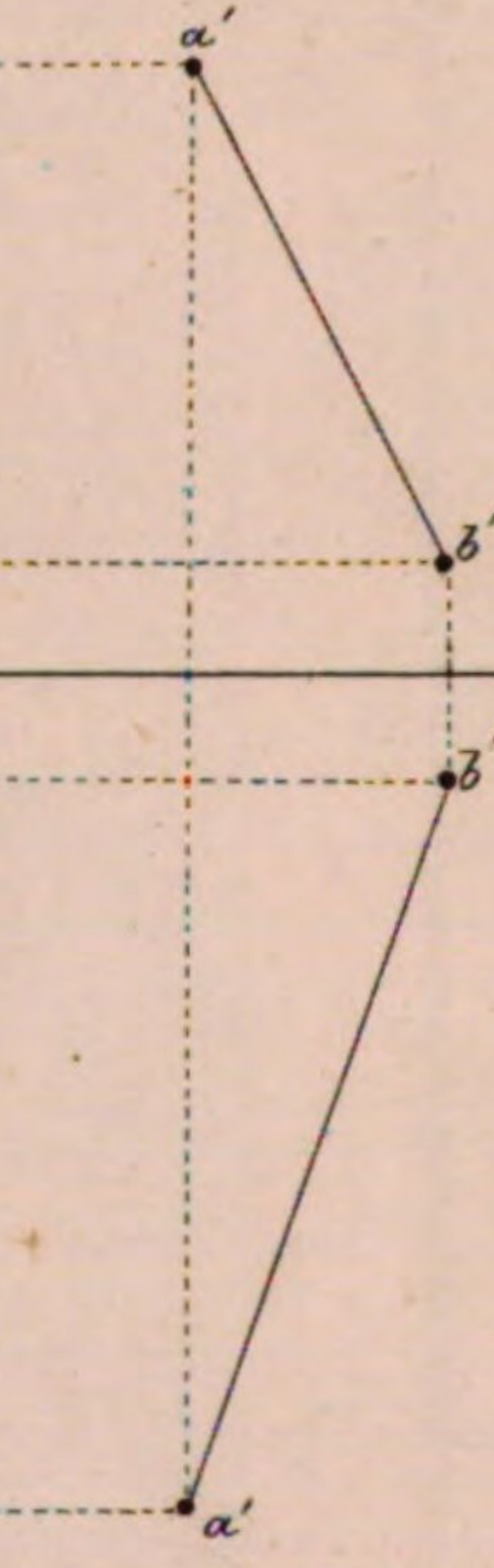


Fig. 10.

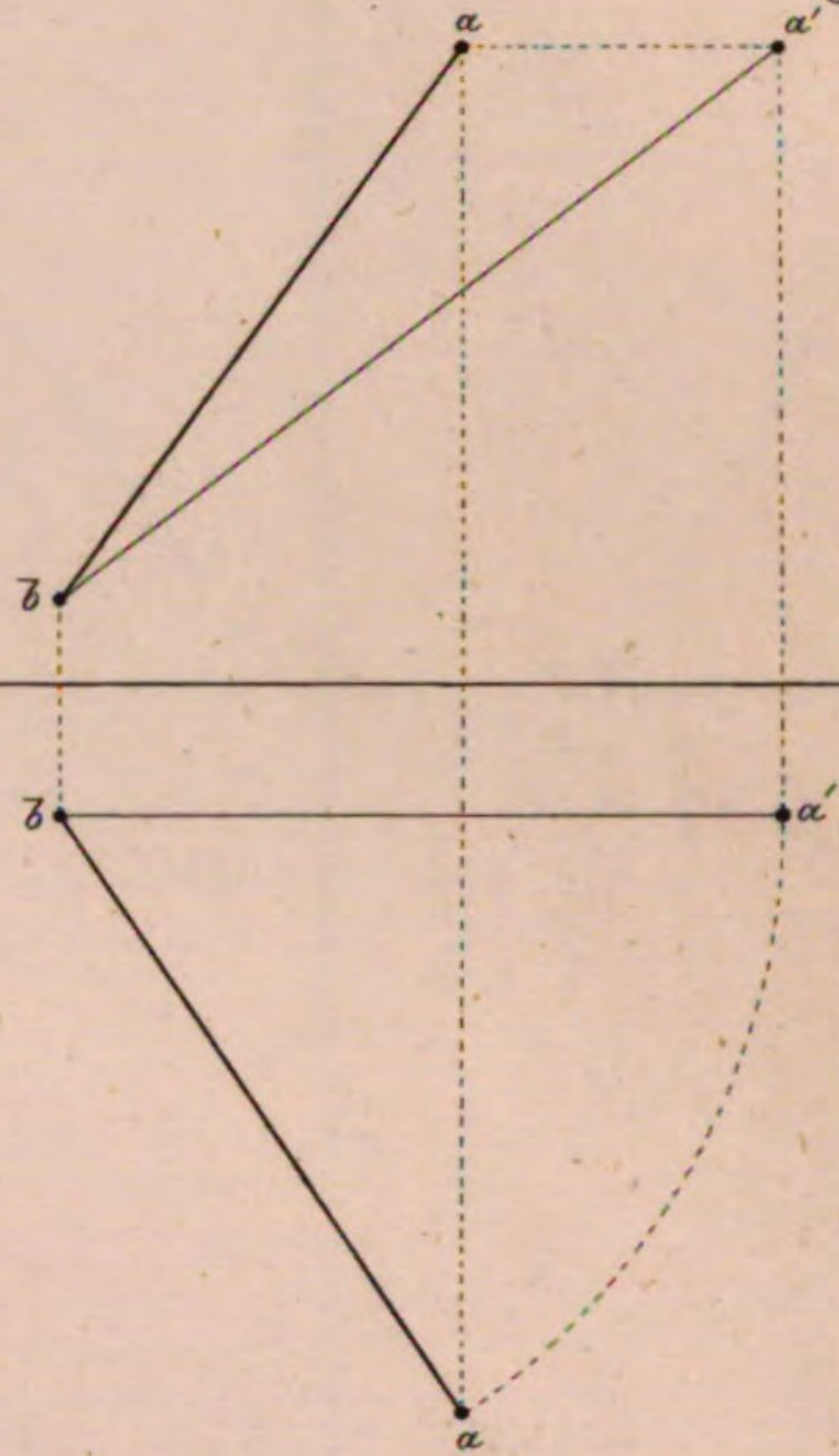


Fig. 11.

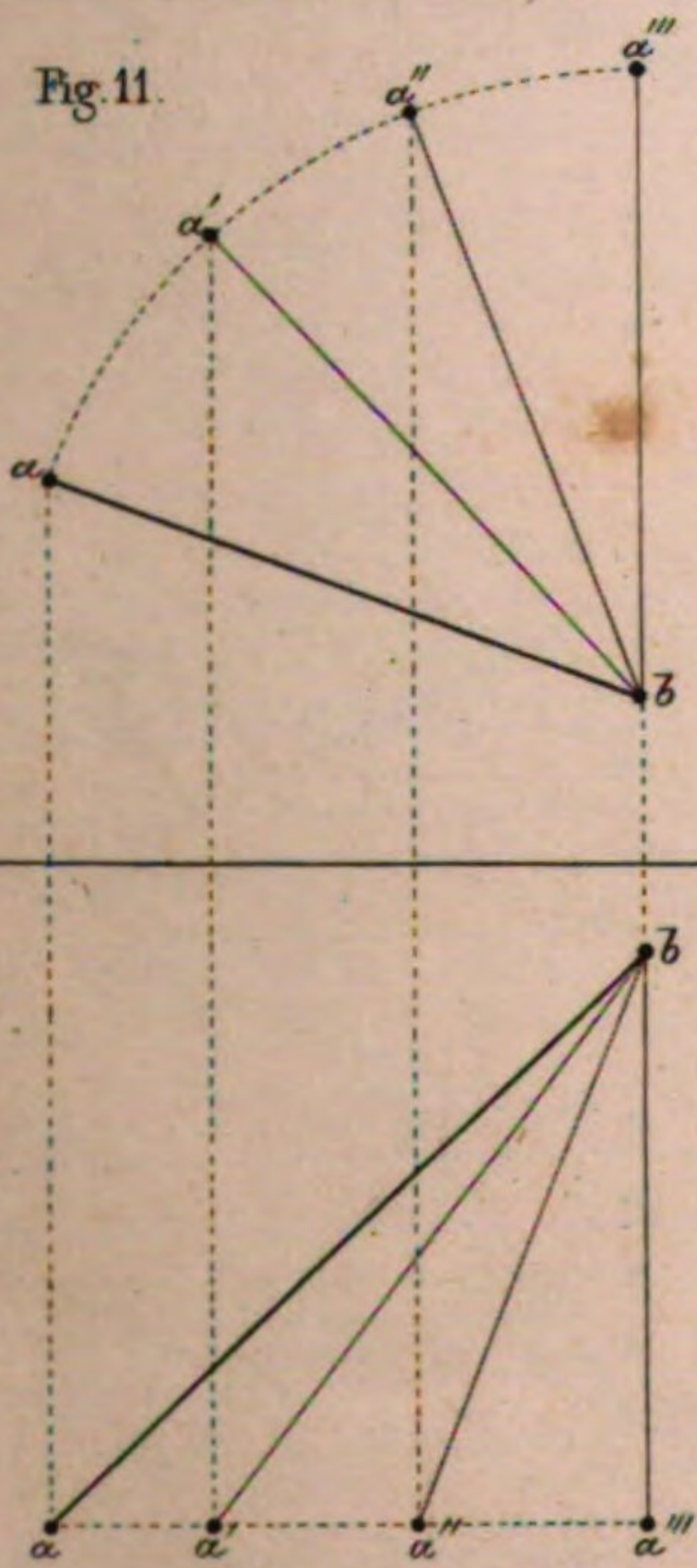


Fig. 12.

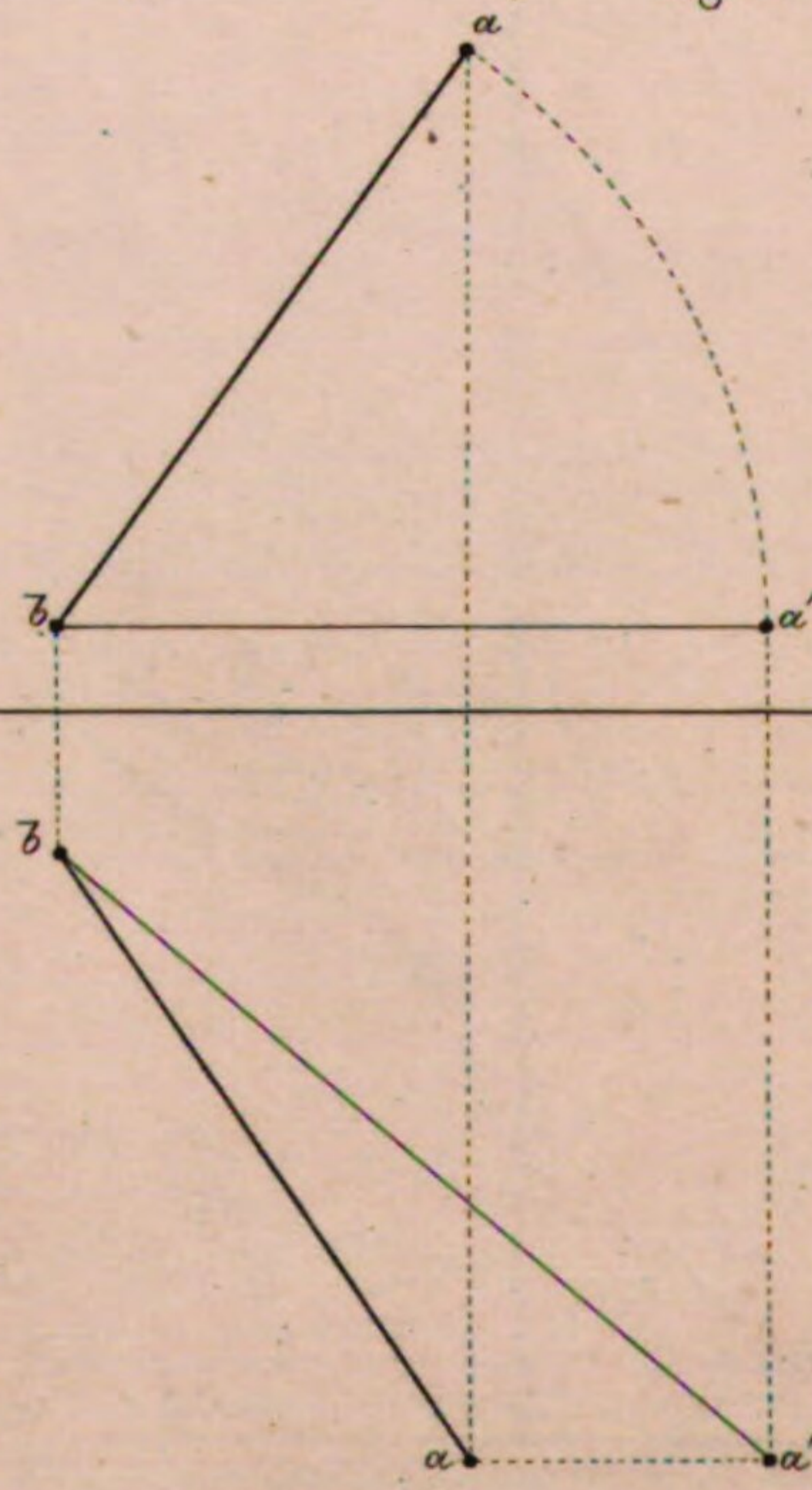
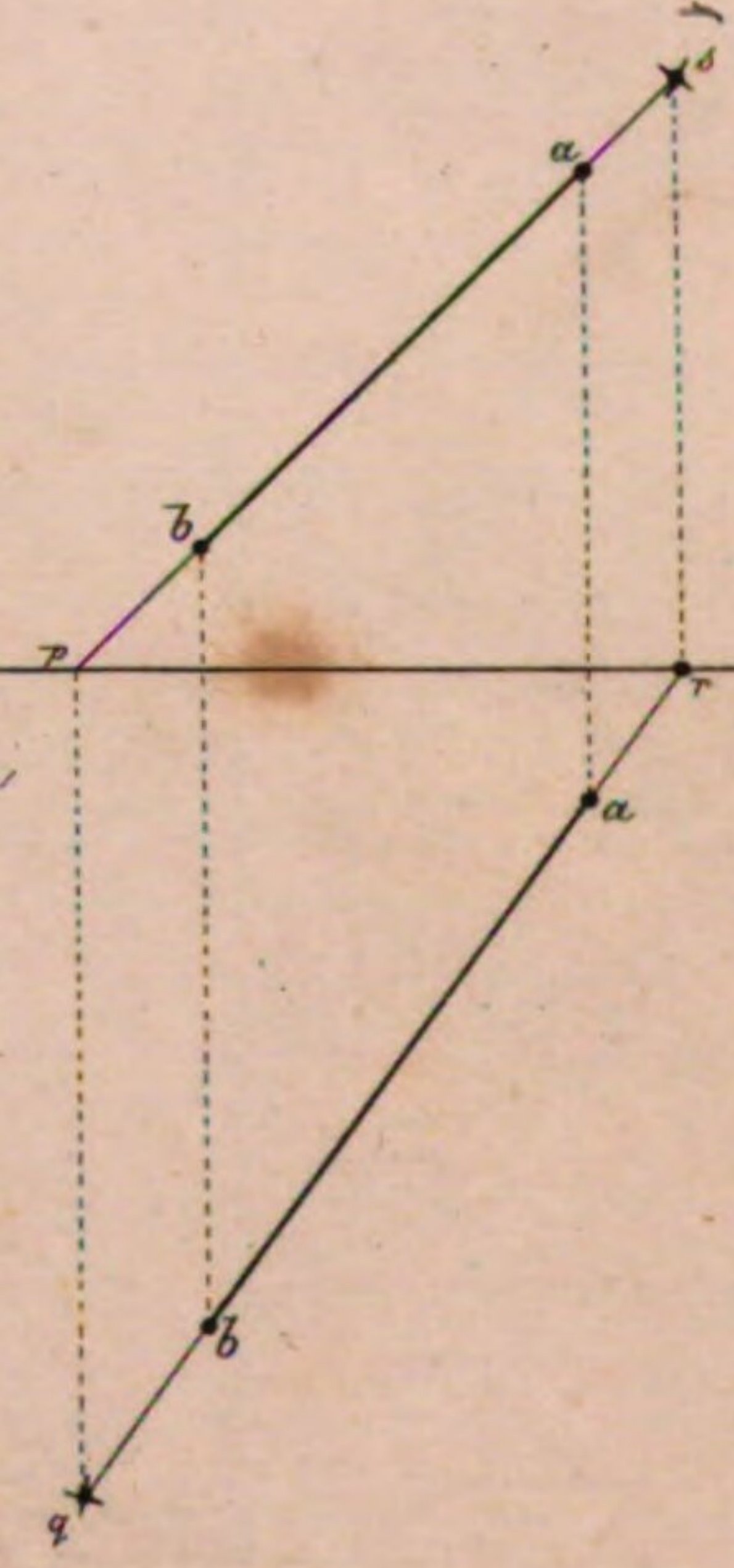


Fig. 13.



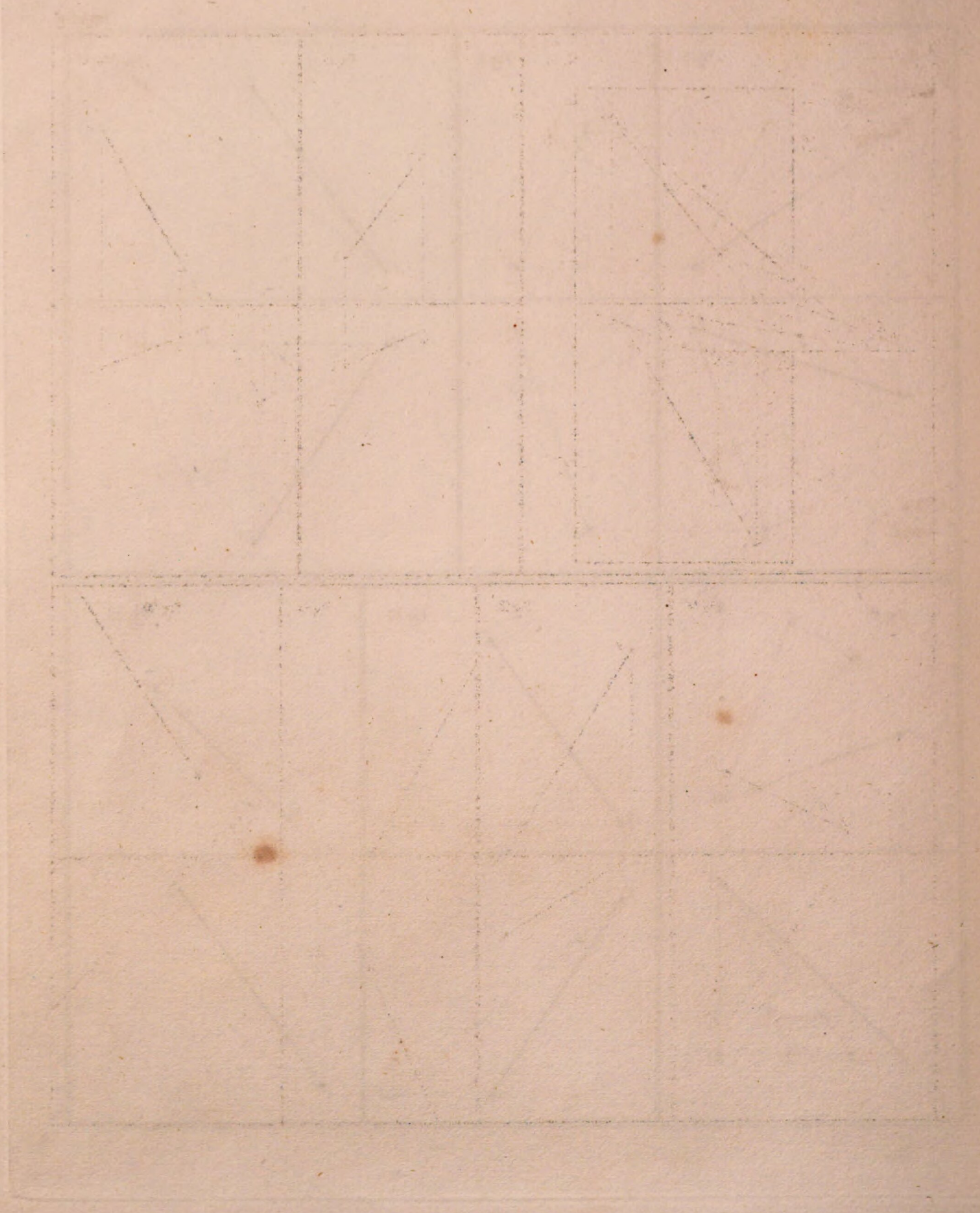


Fig.14.

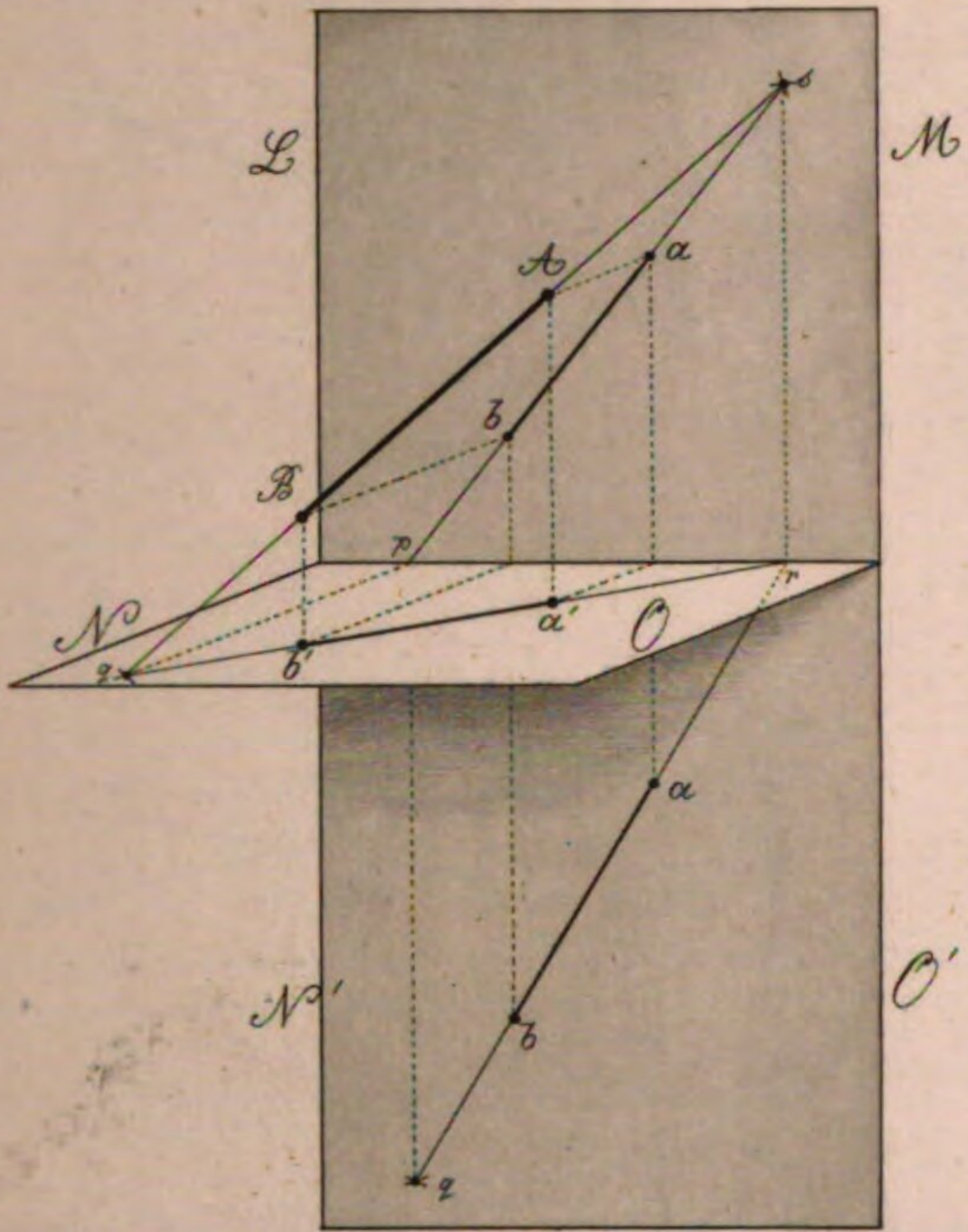


Fig.15.

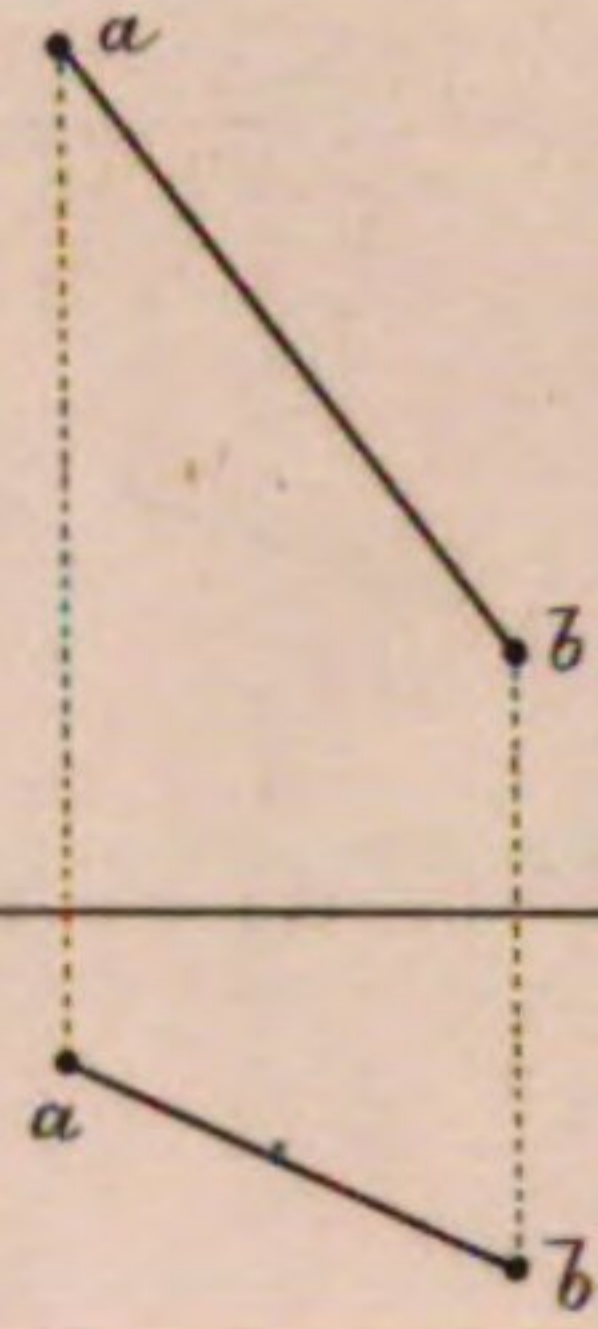


Fig.16.

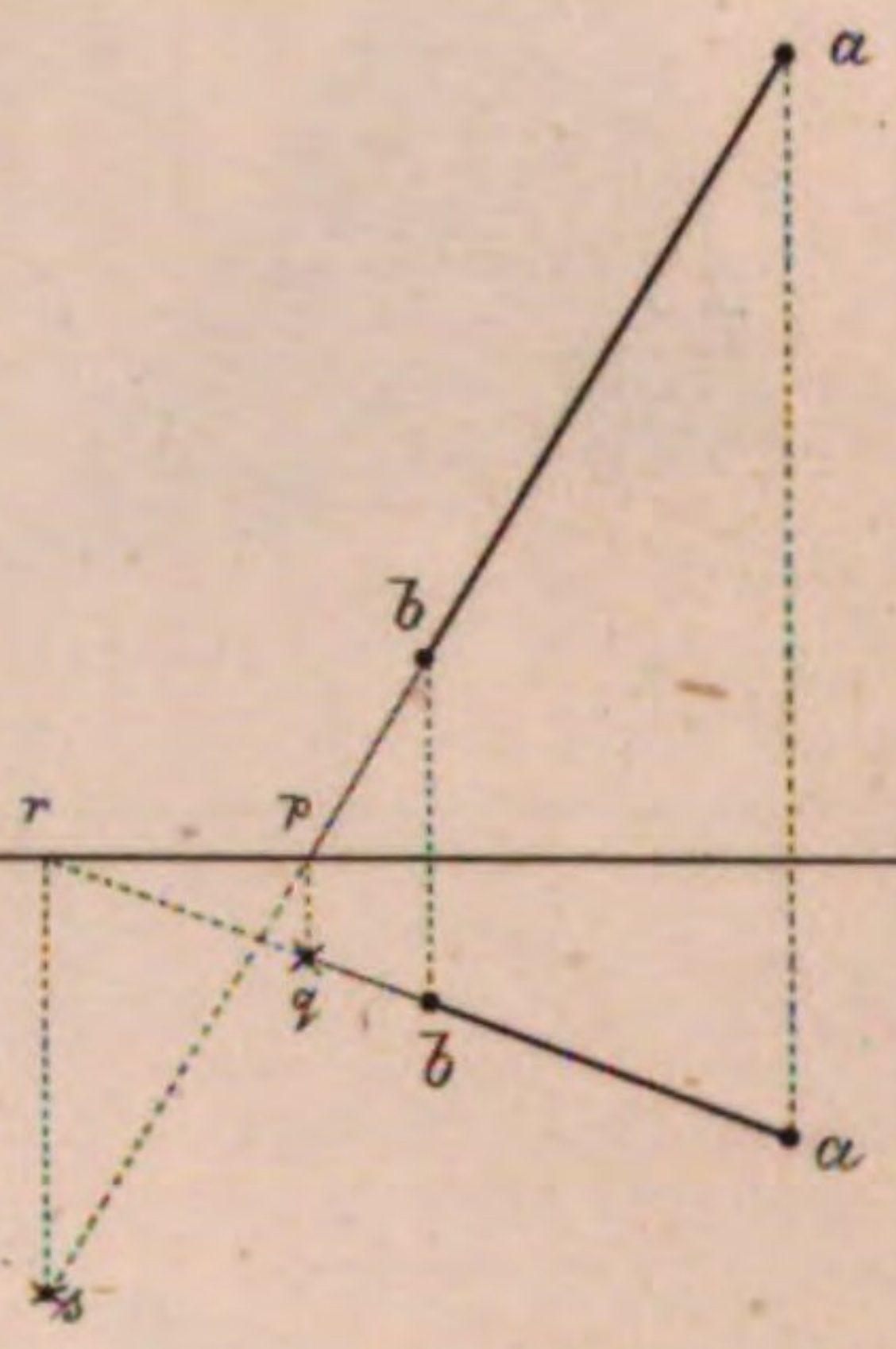


Fig.17.

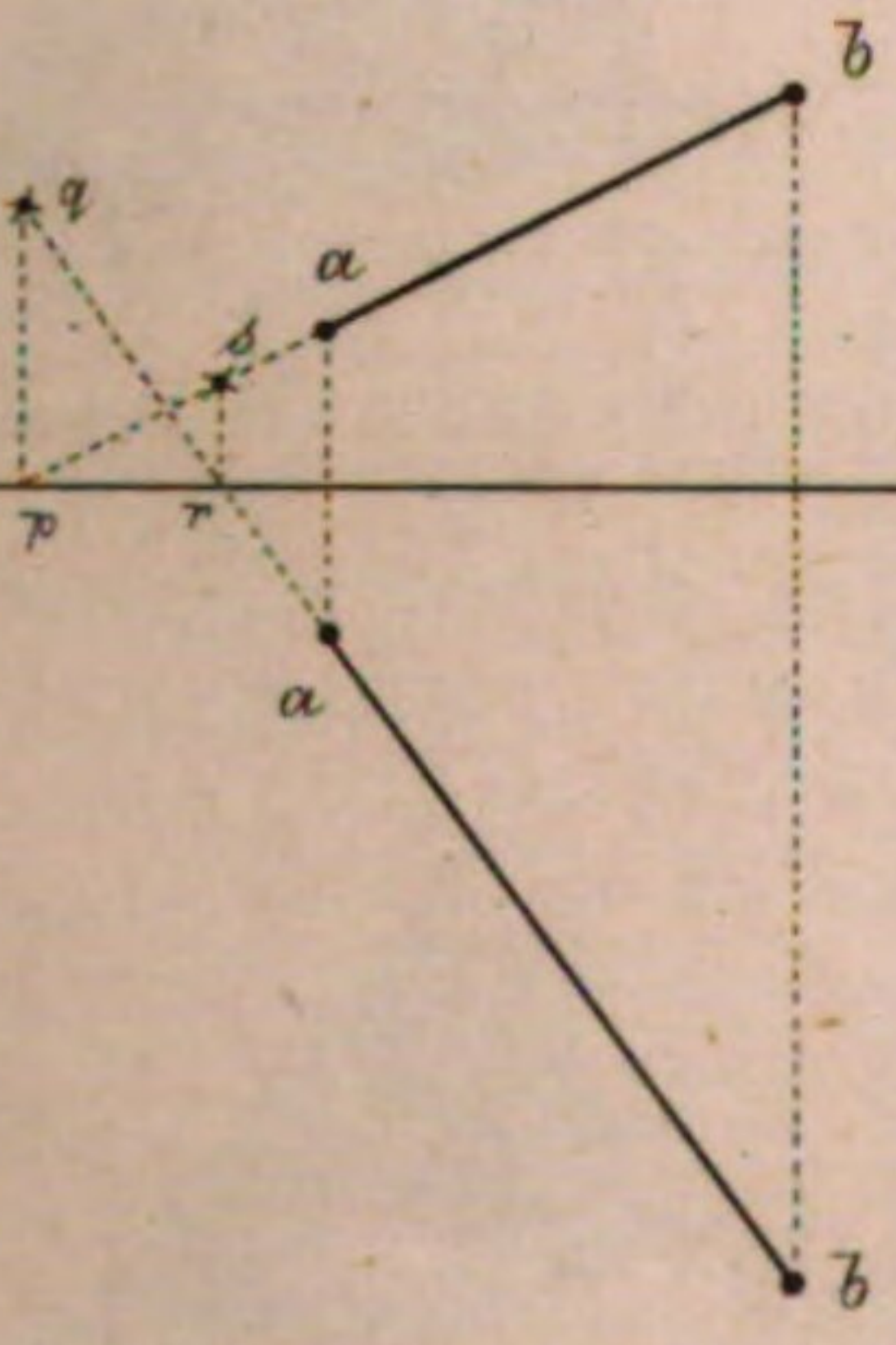


Fig.18.

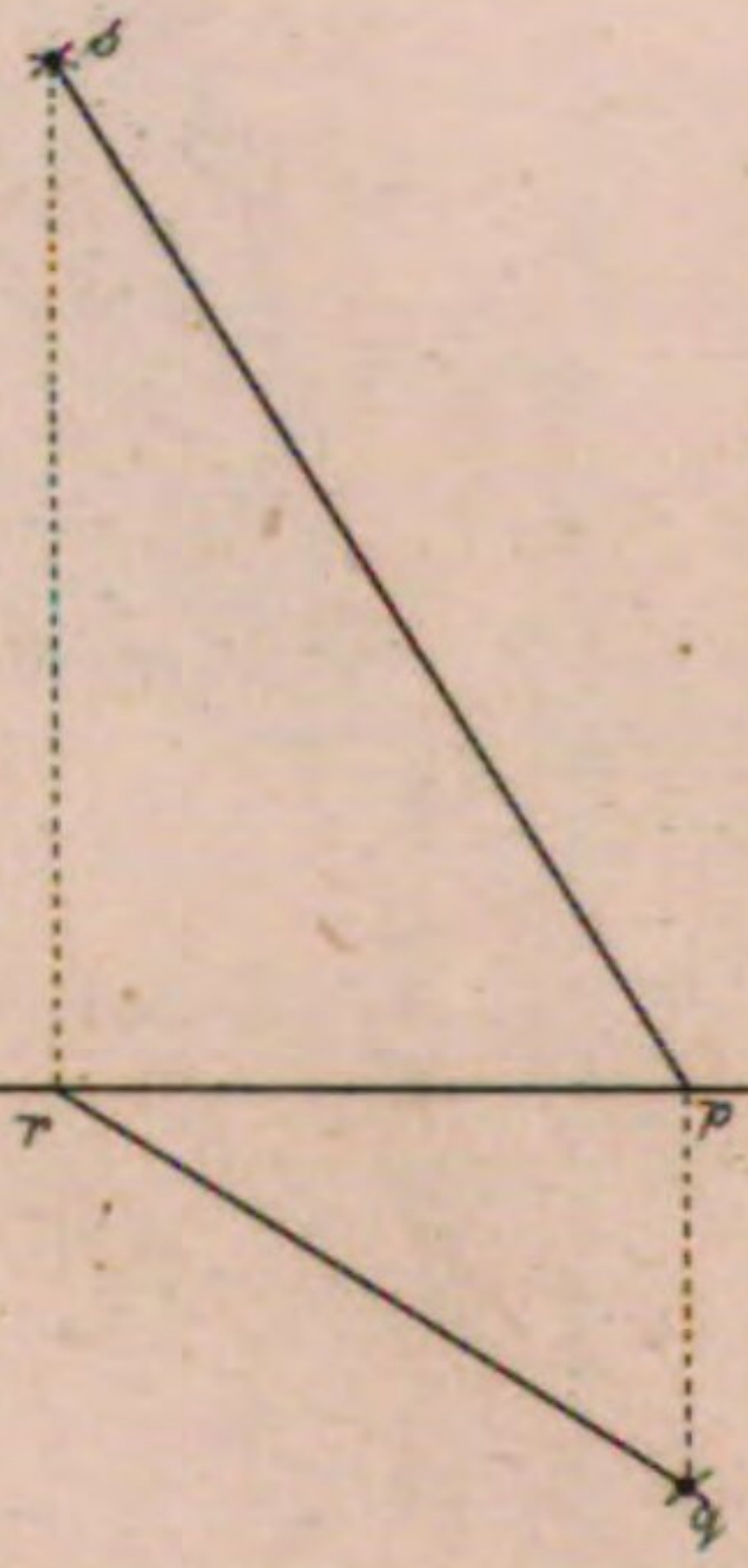


Fig.19.

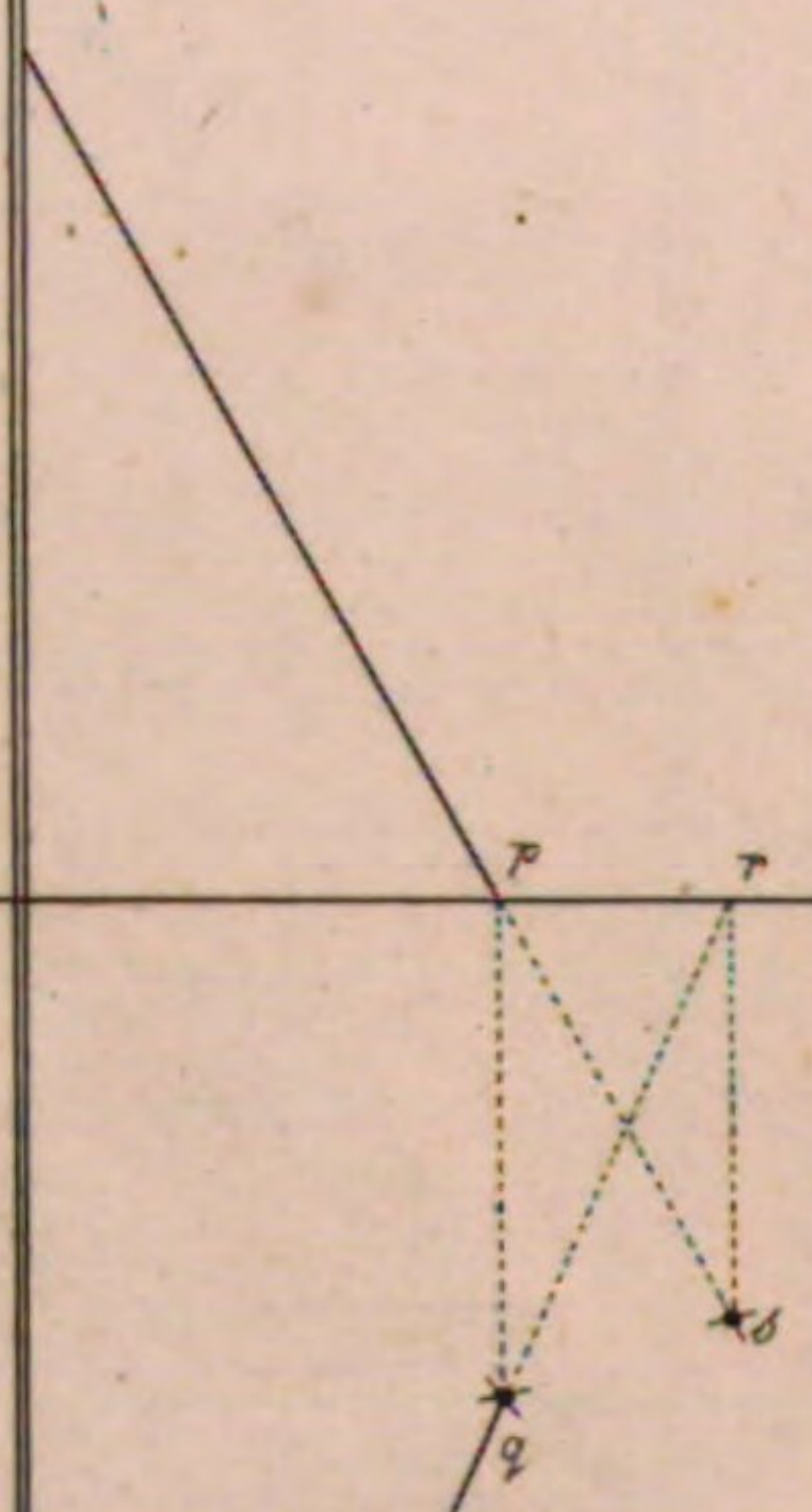
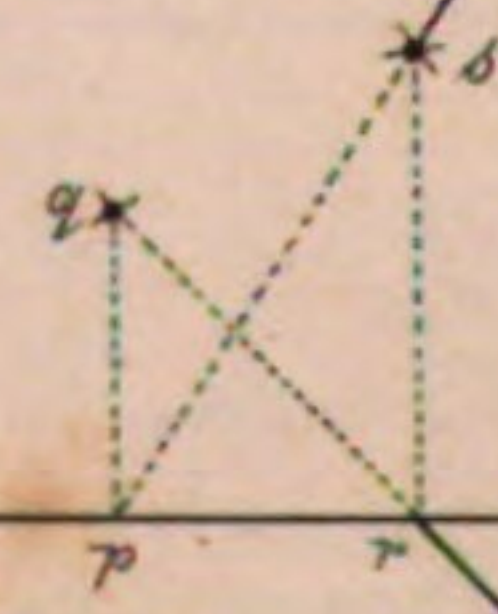
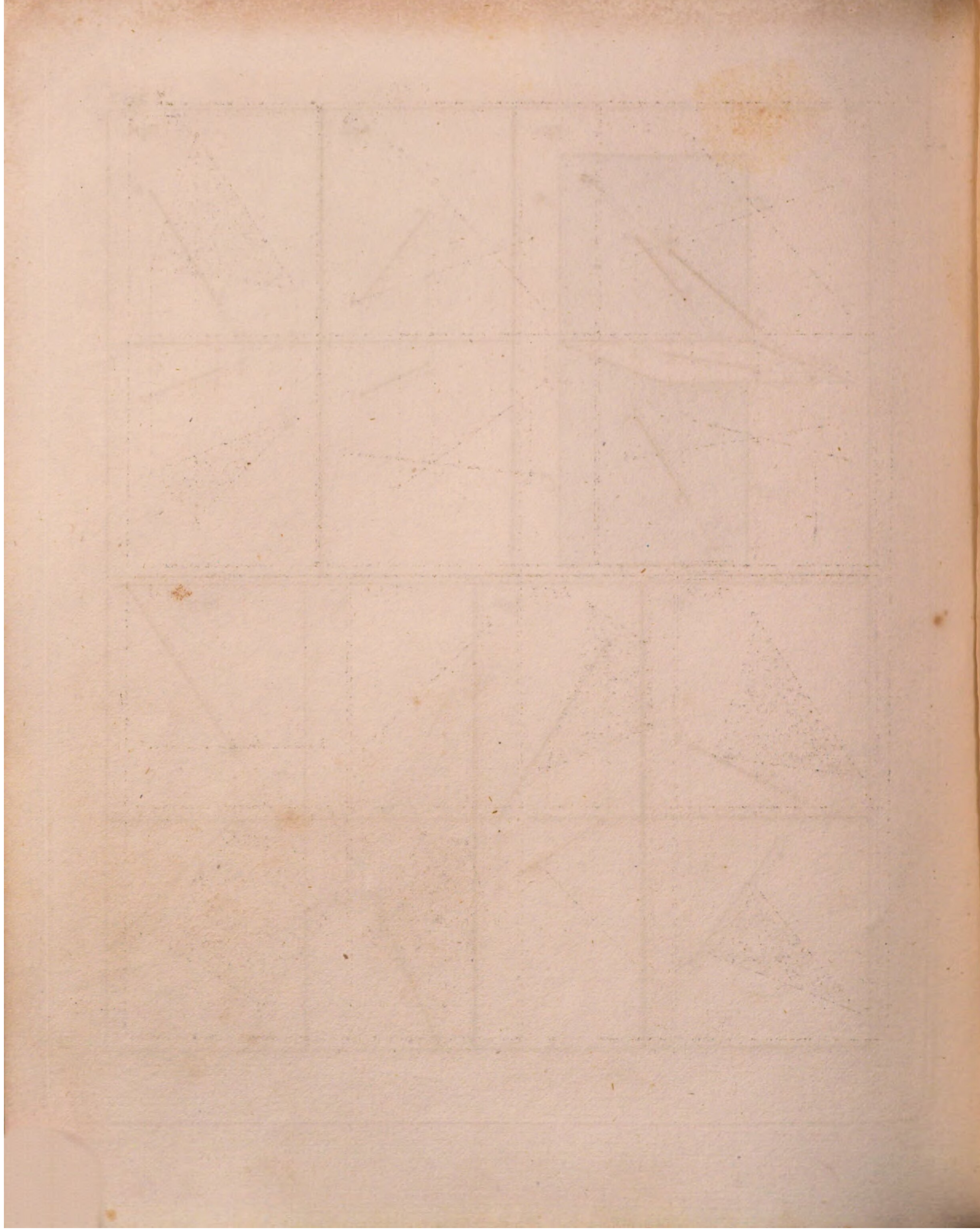
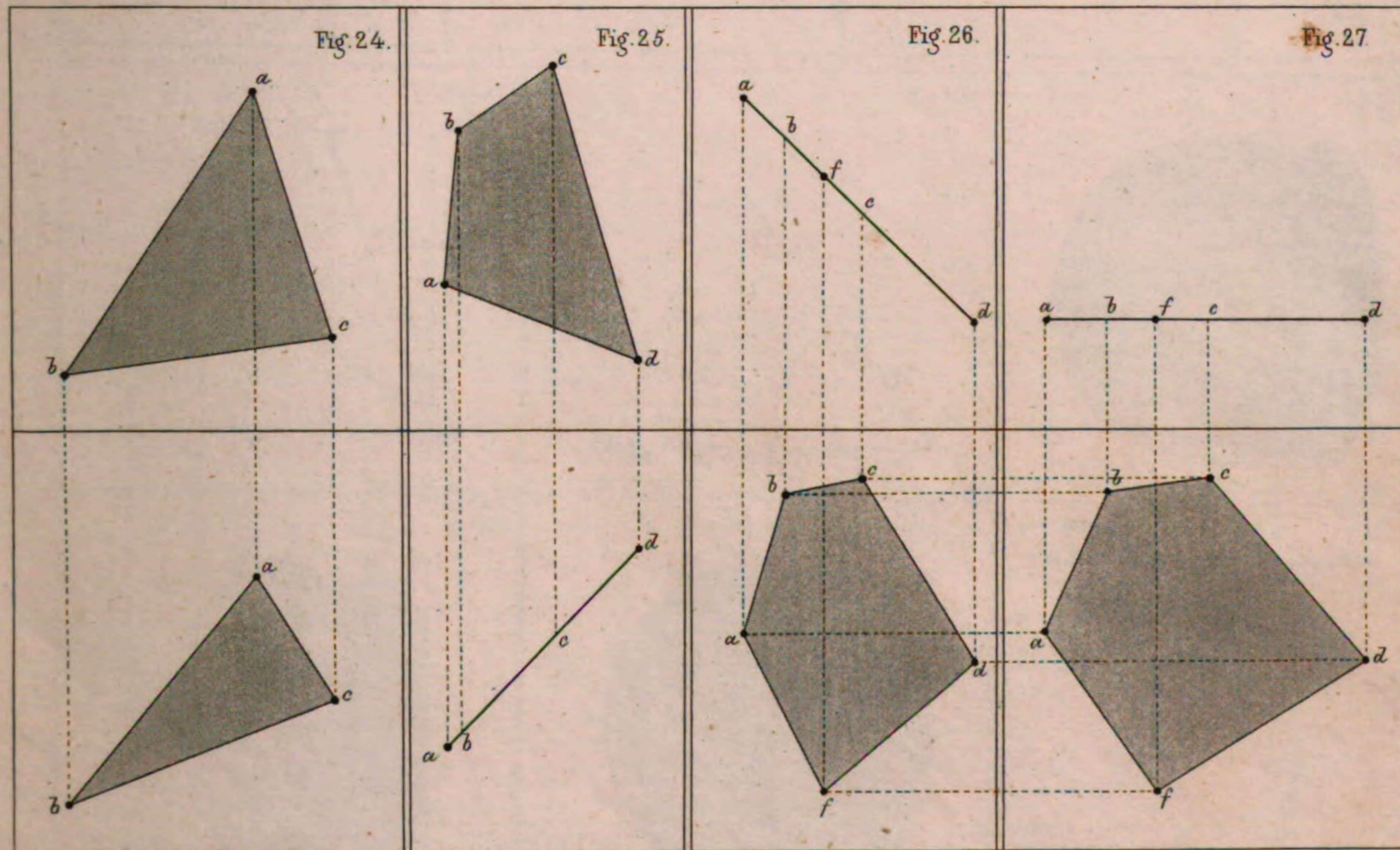
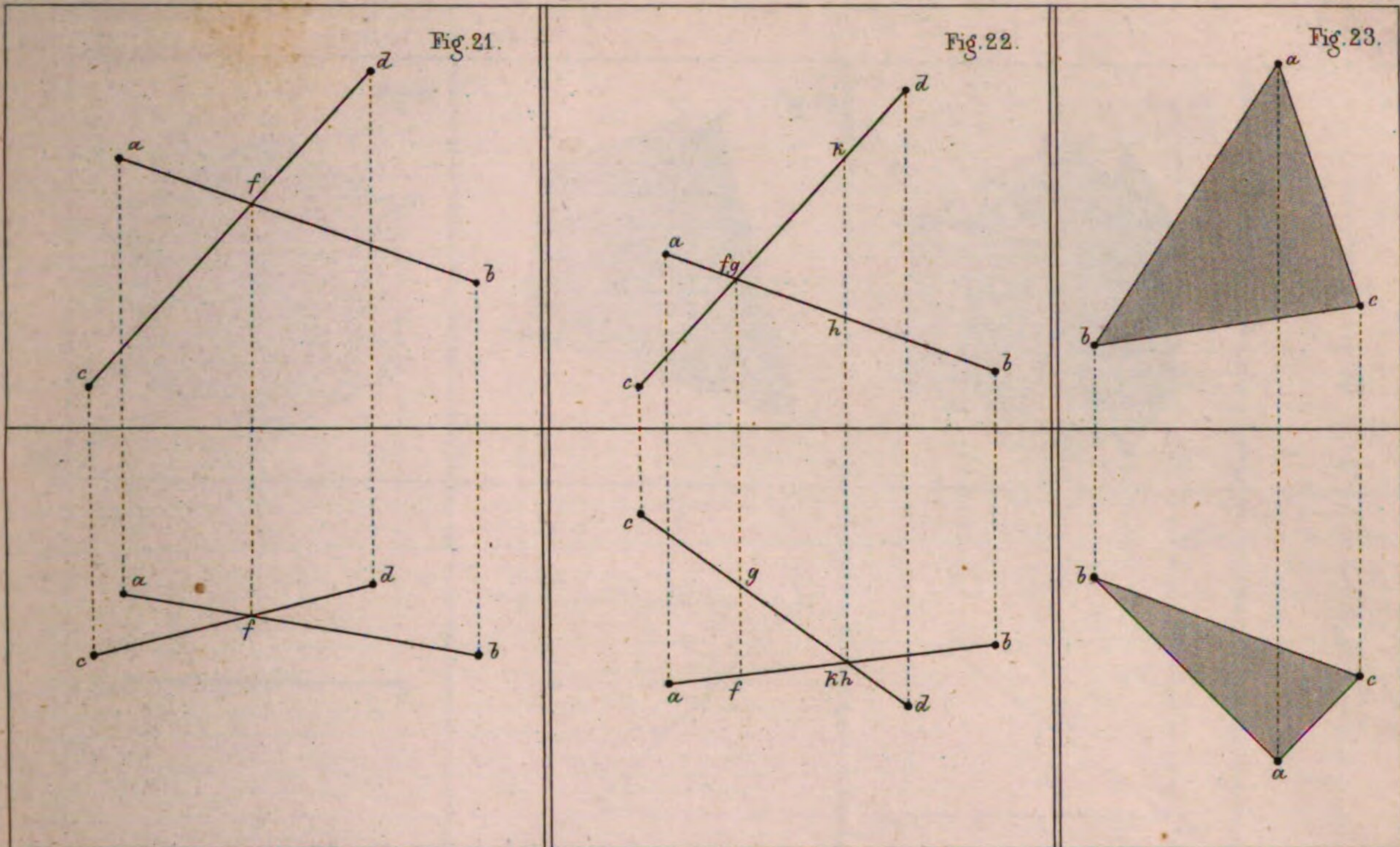


Fig. 20.







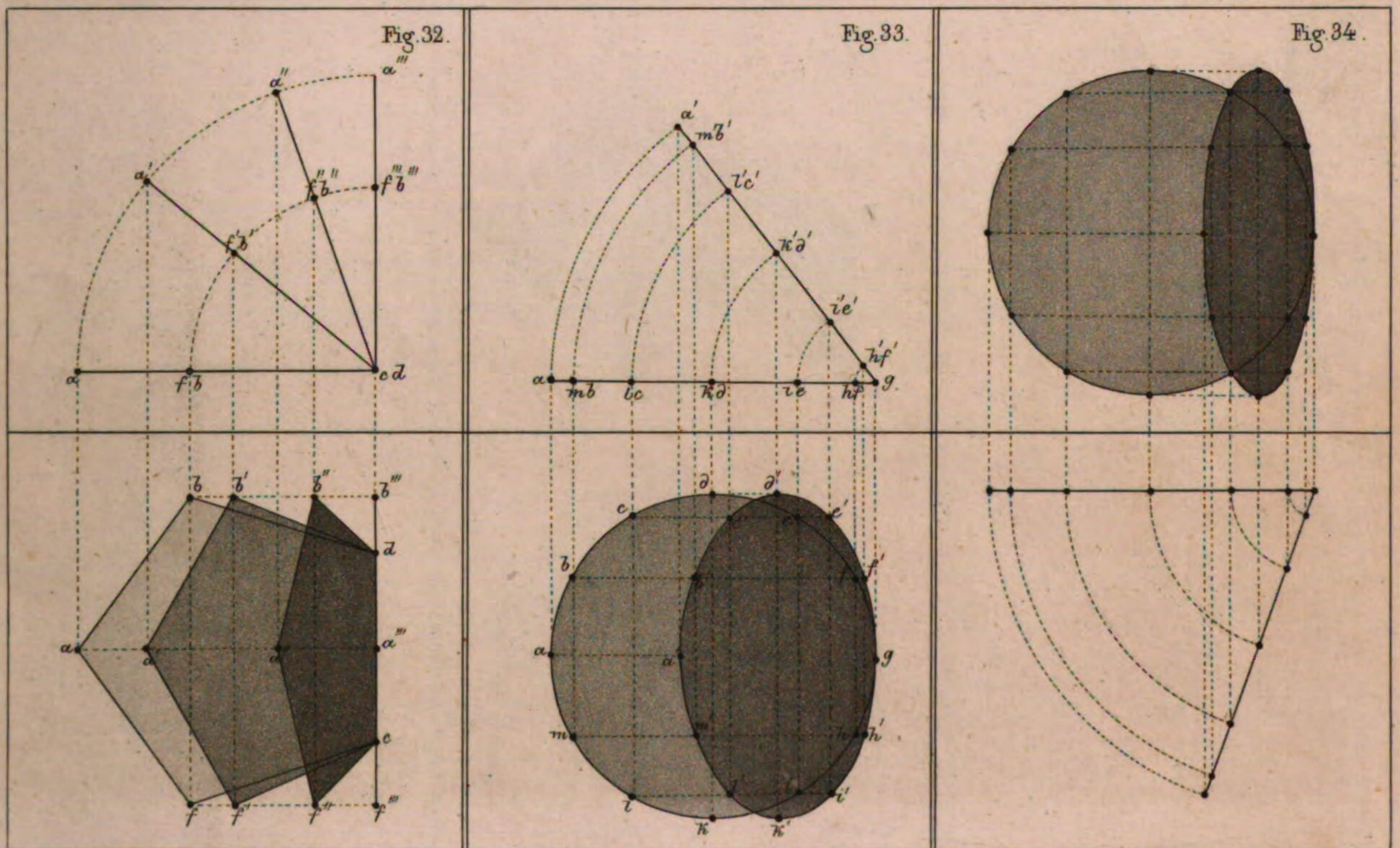
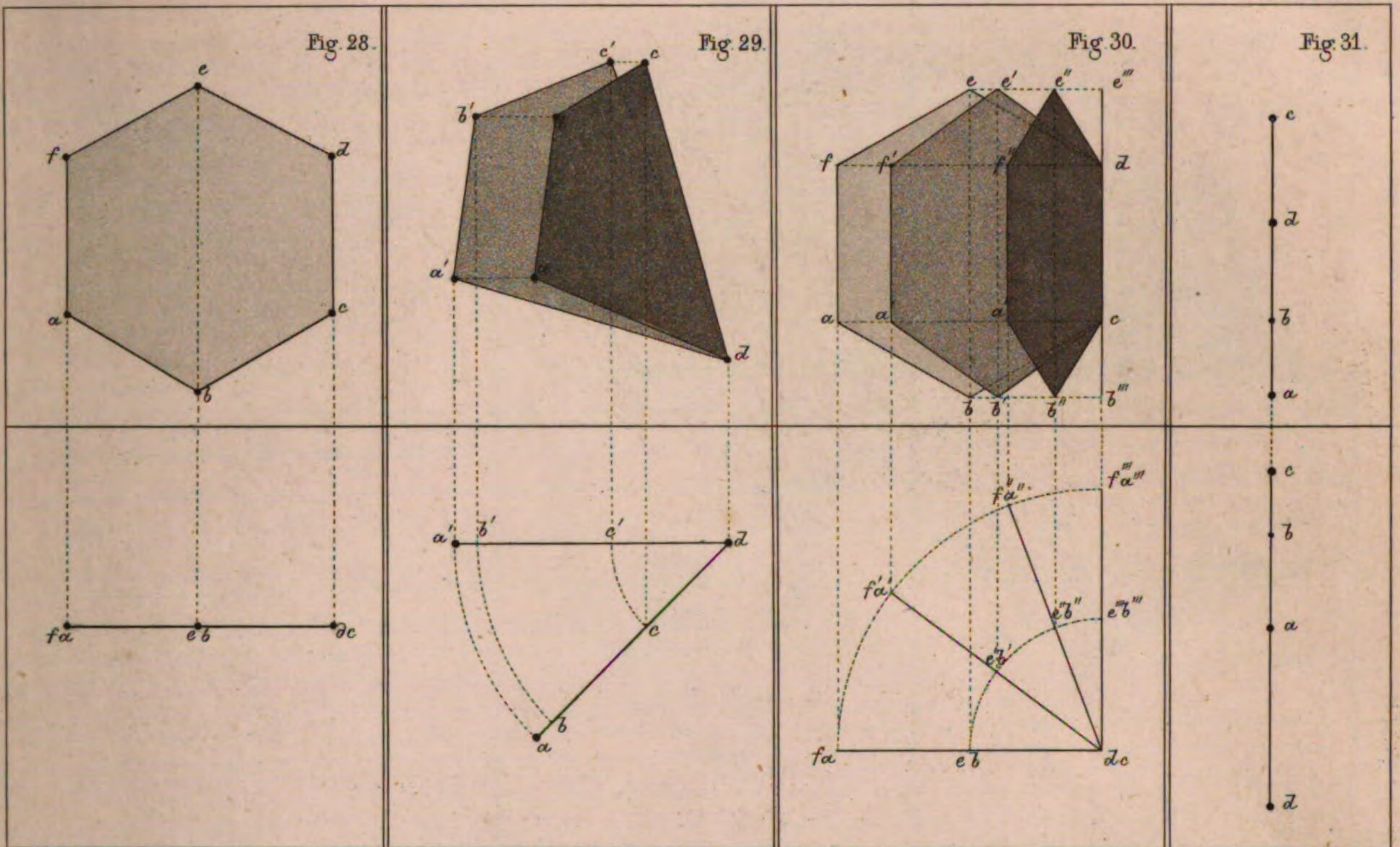




Fig.35.

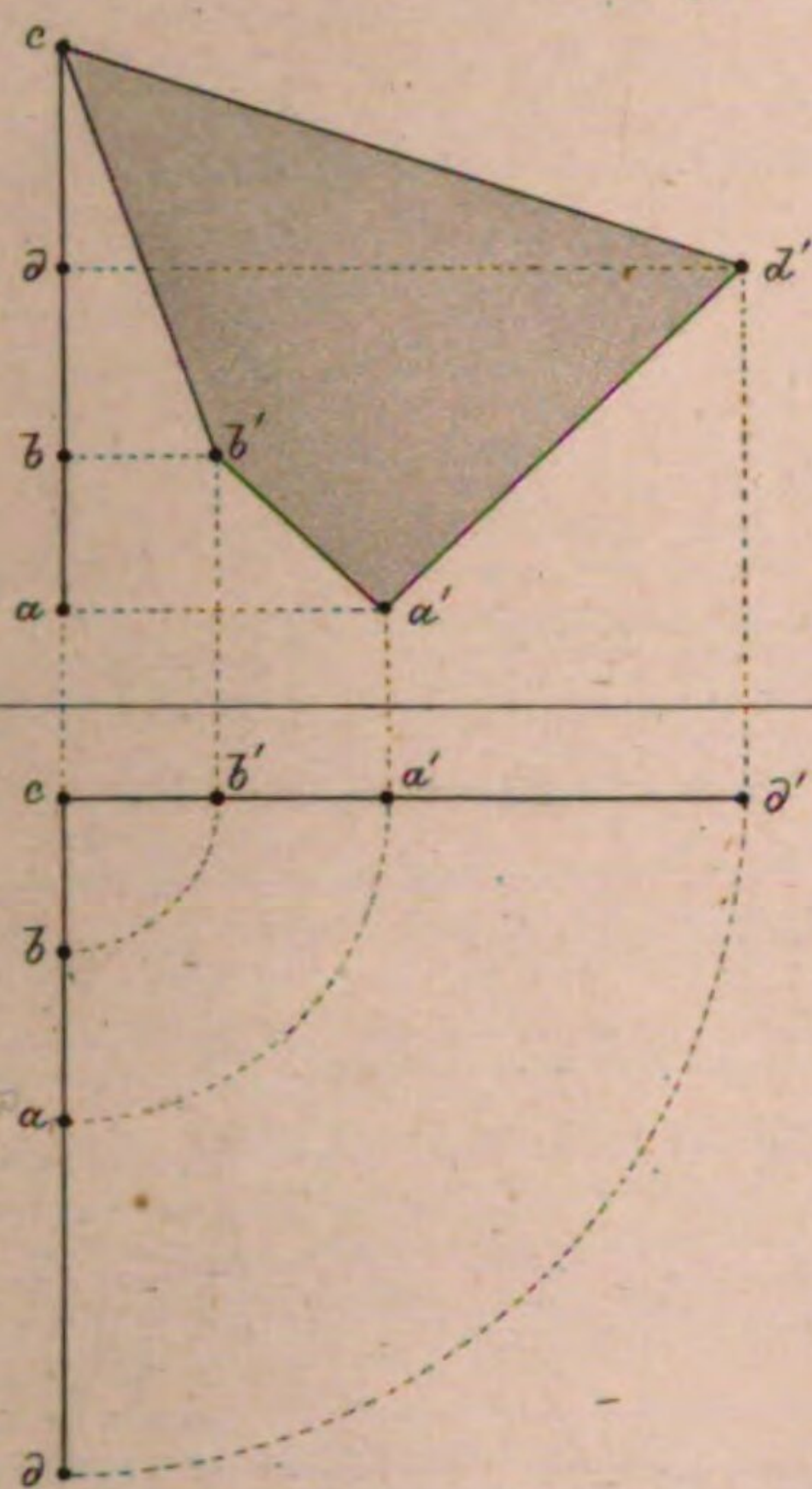


Fig.36.

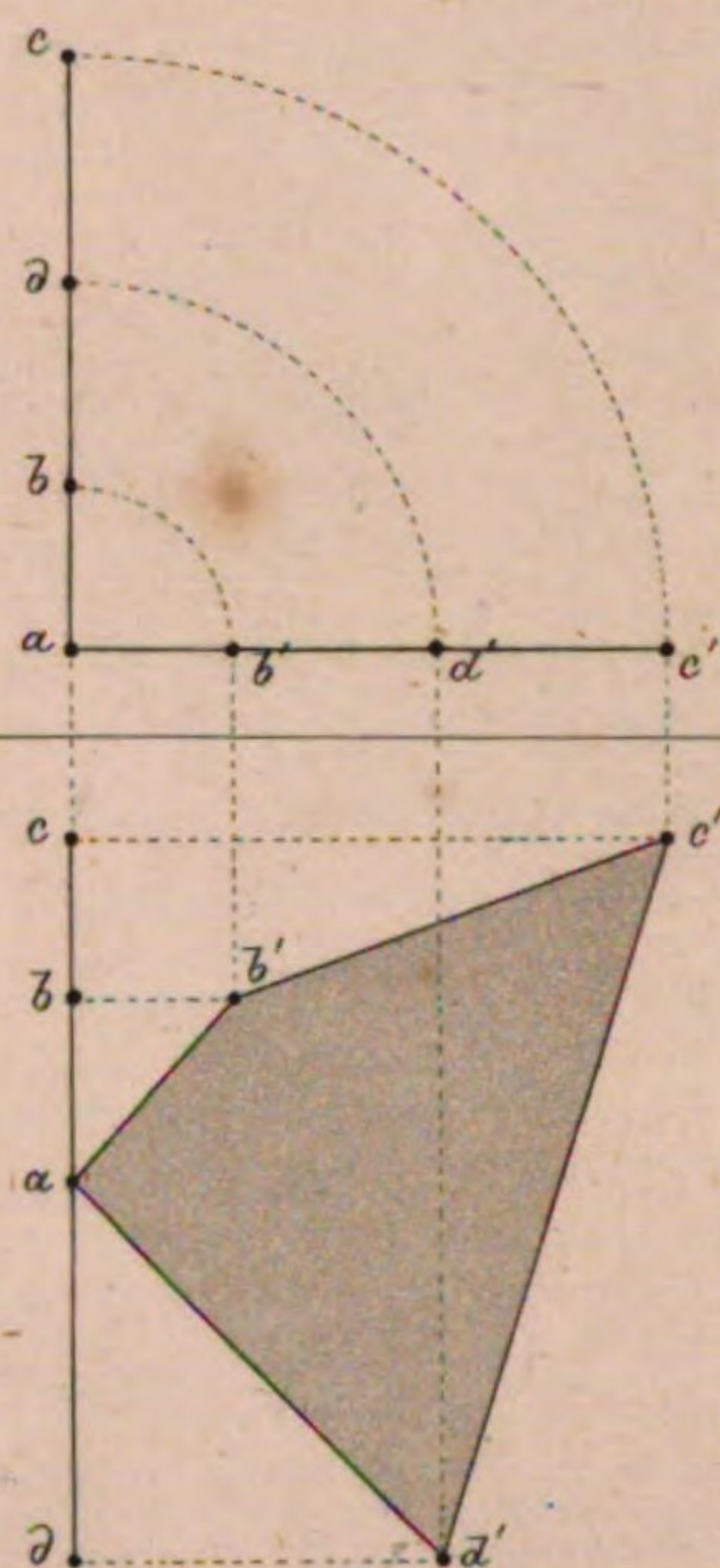


Fig.37.

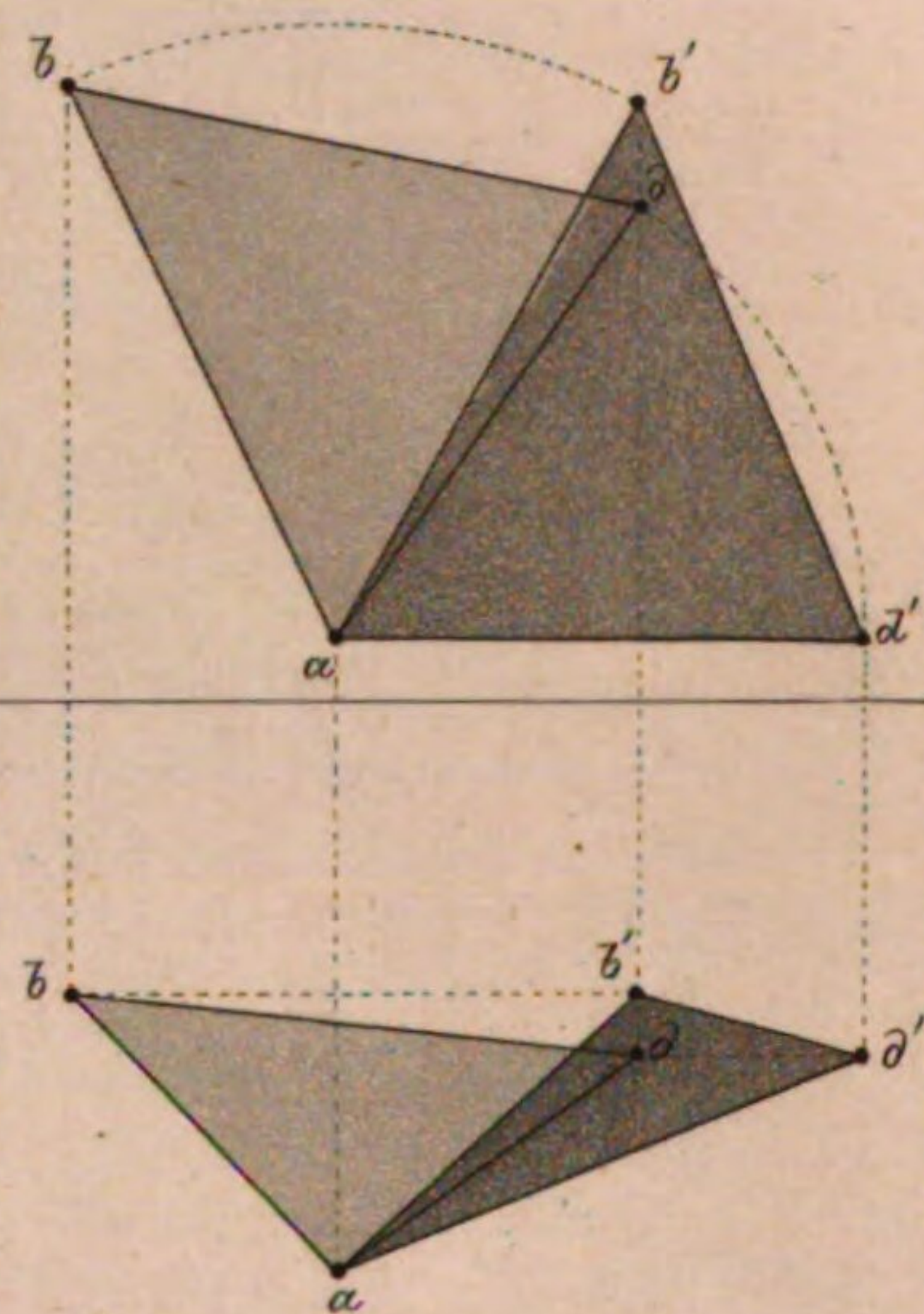


Fig.38.

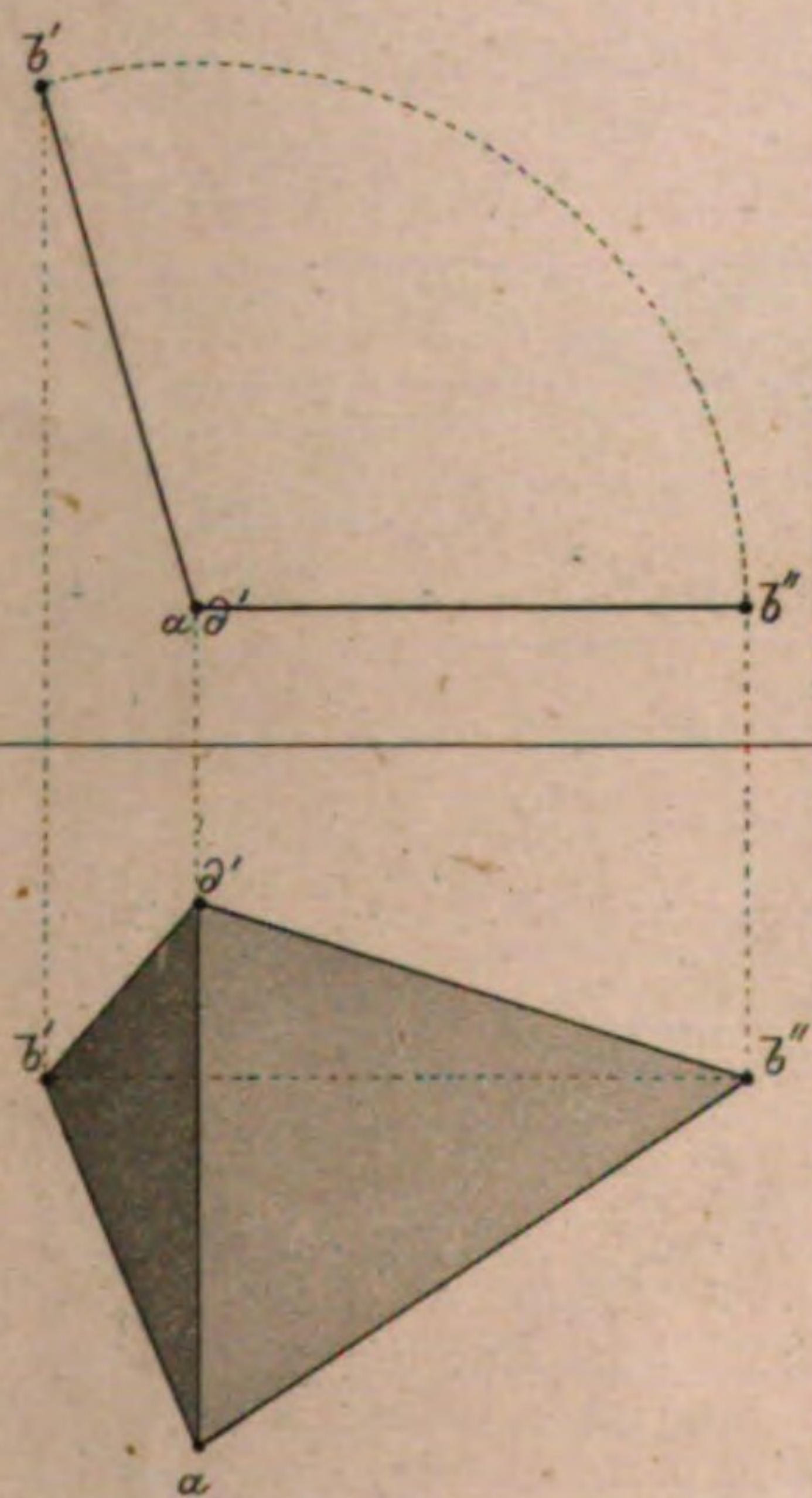


Fig.39.

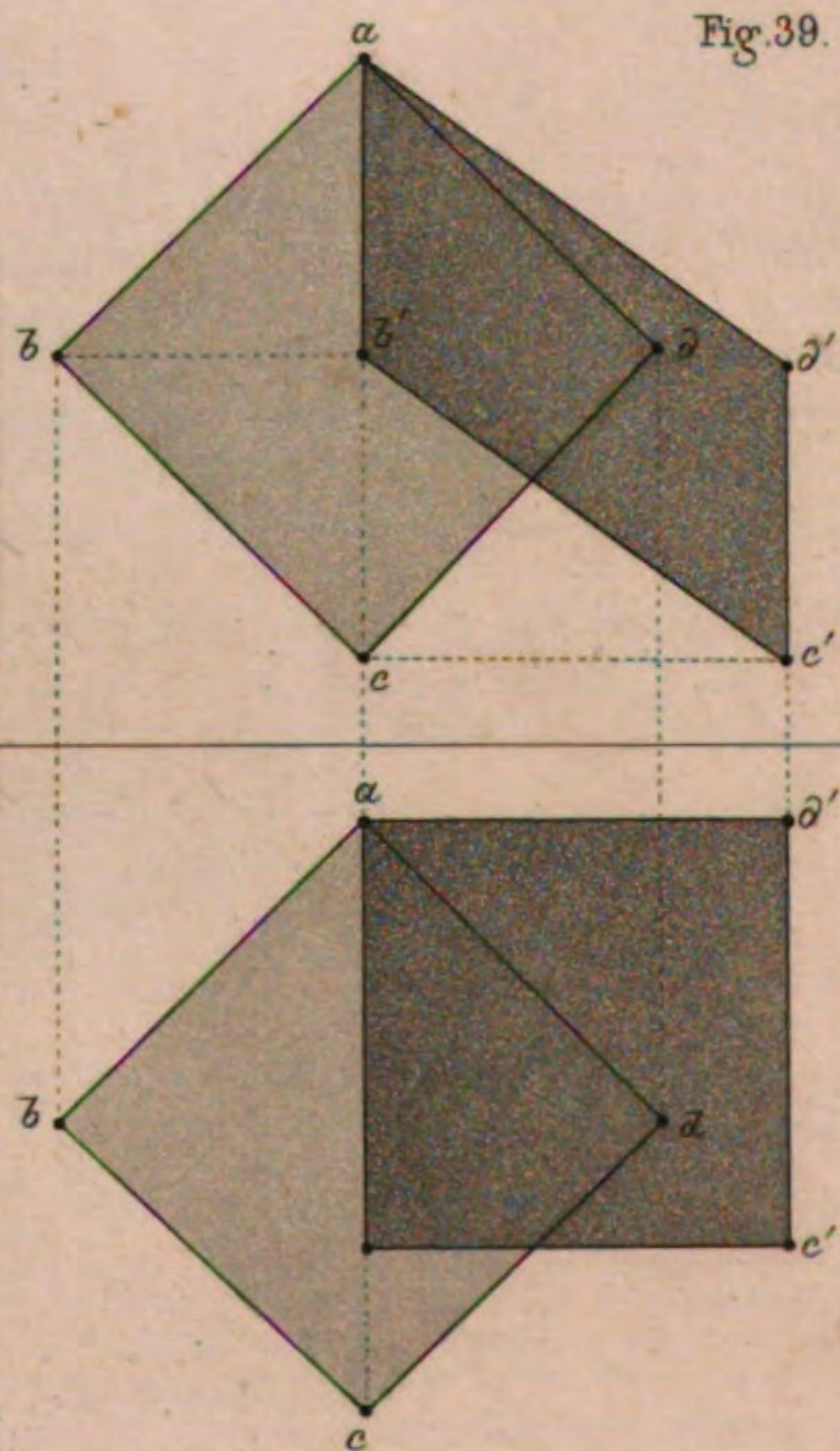
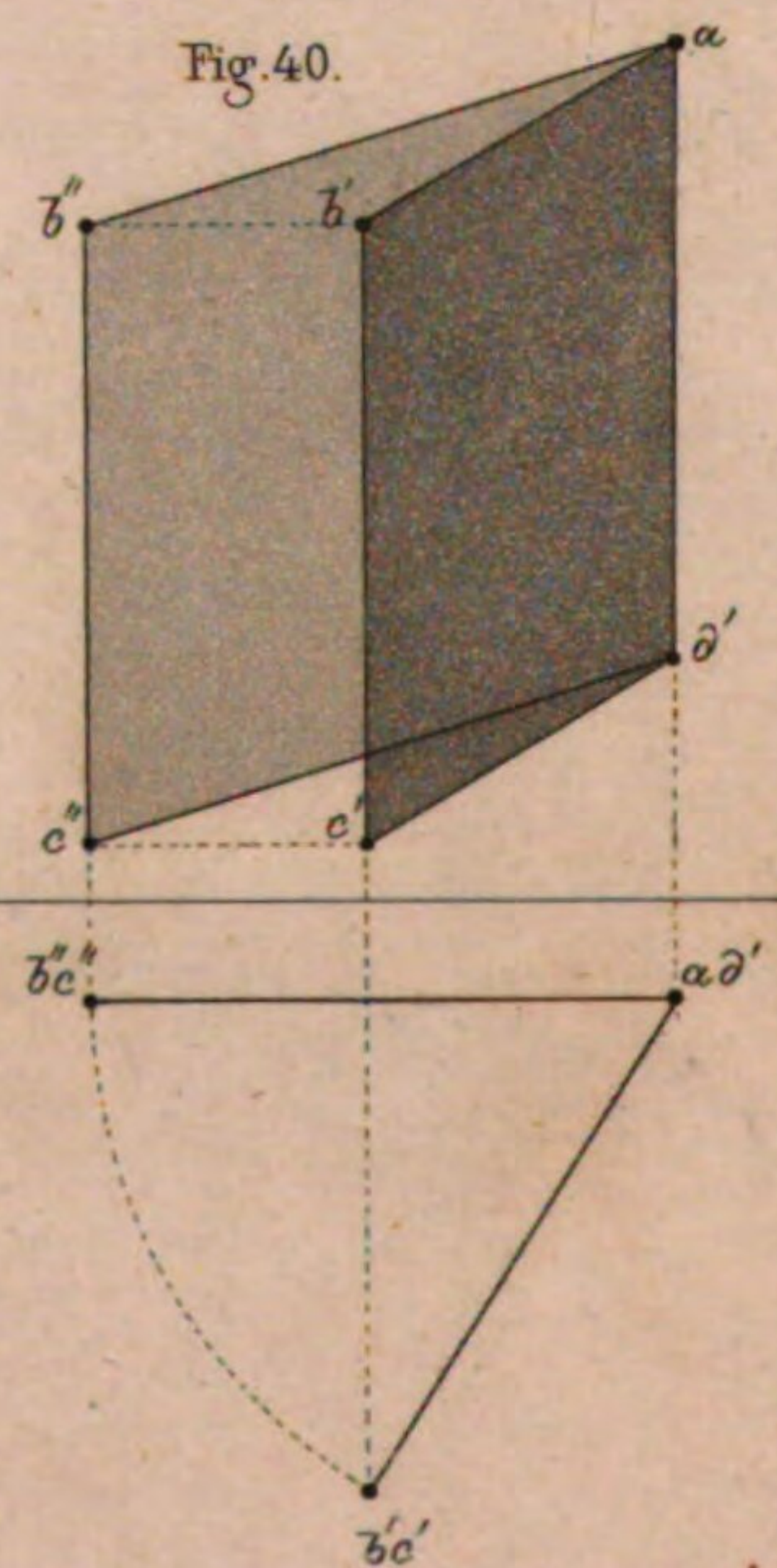


Fig.40.



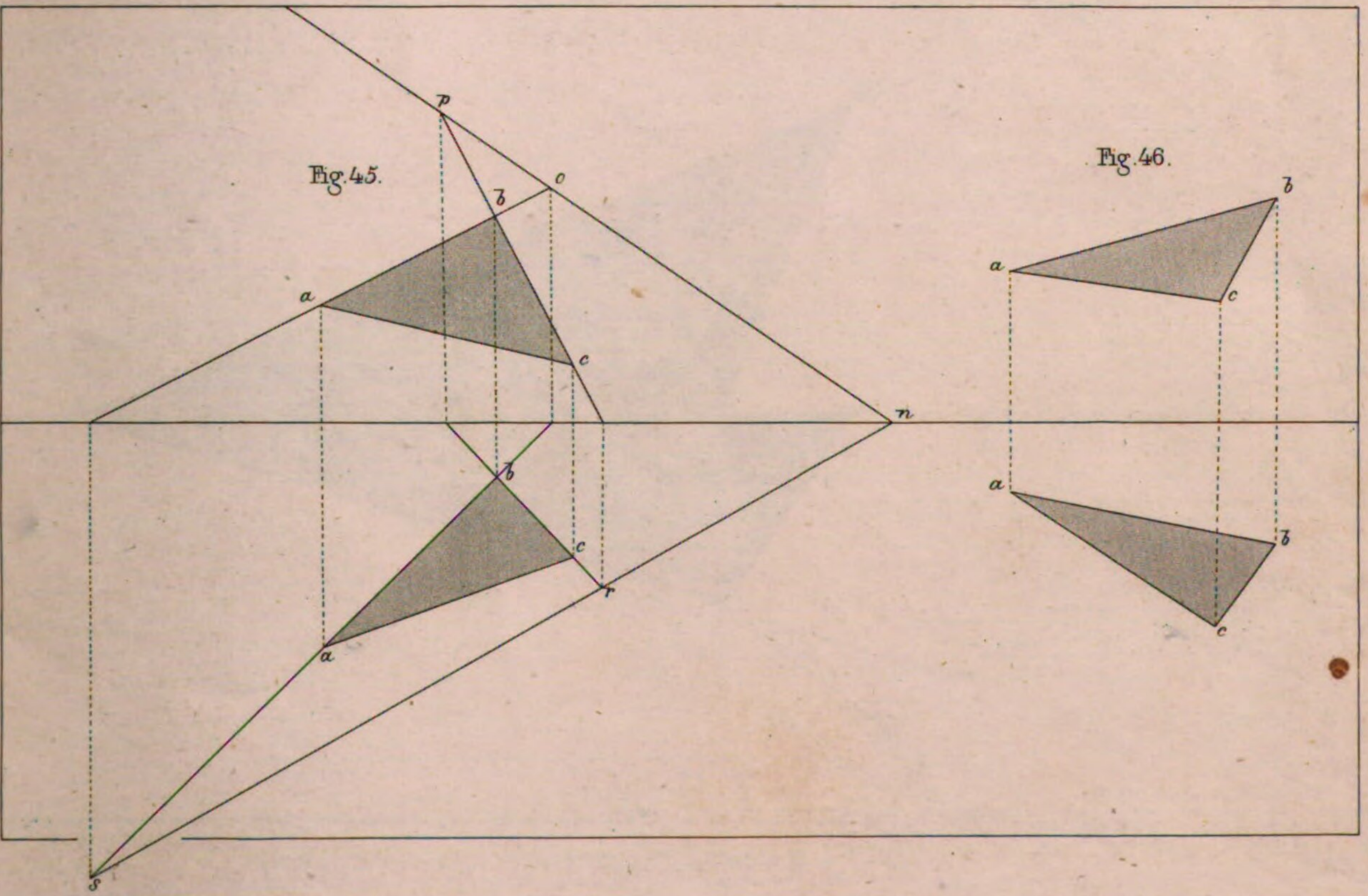
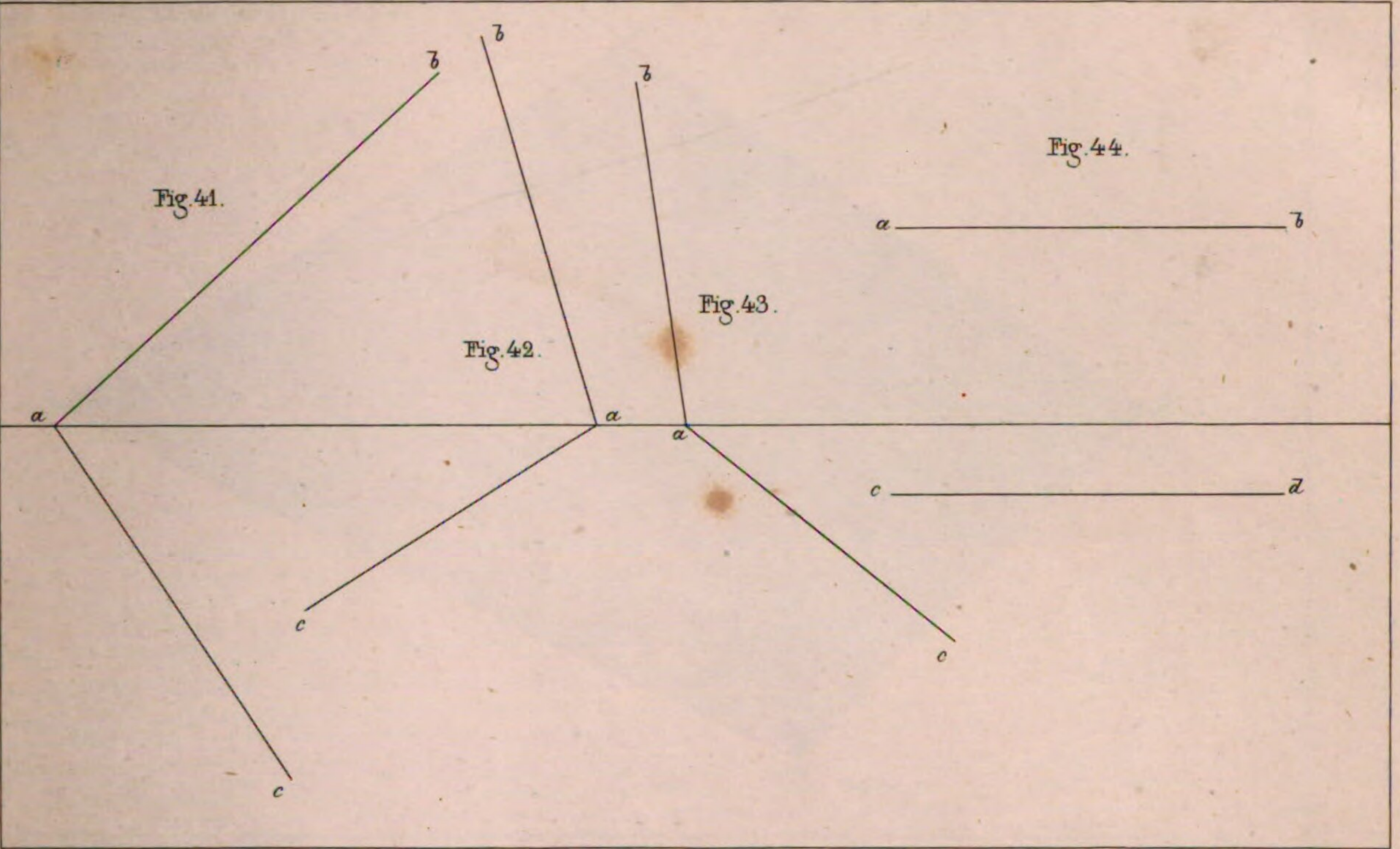


Fig. 47.

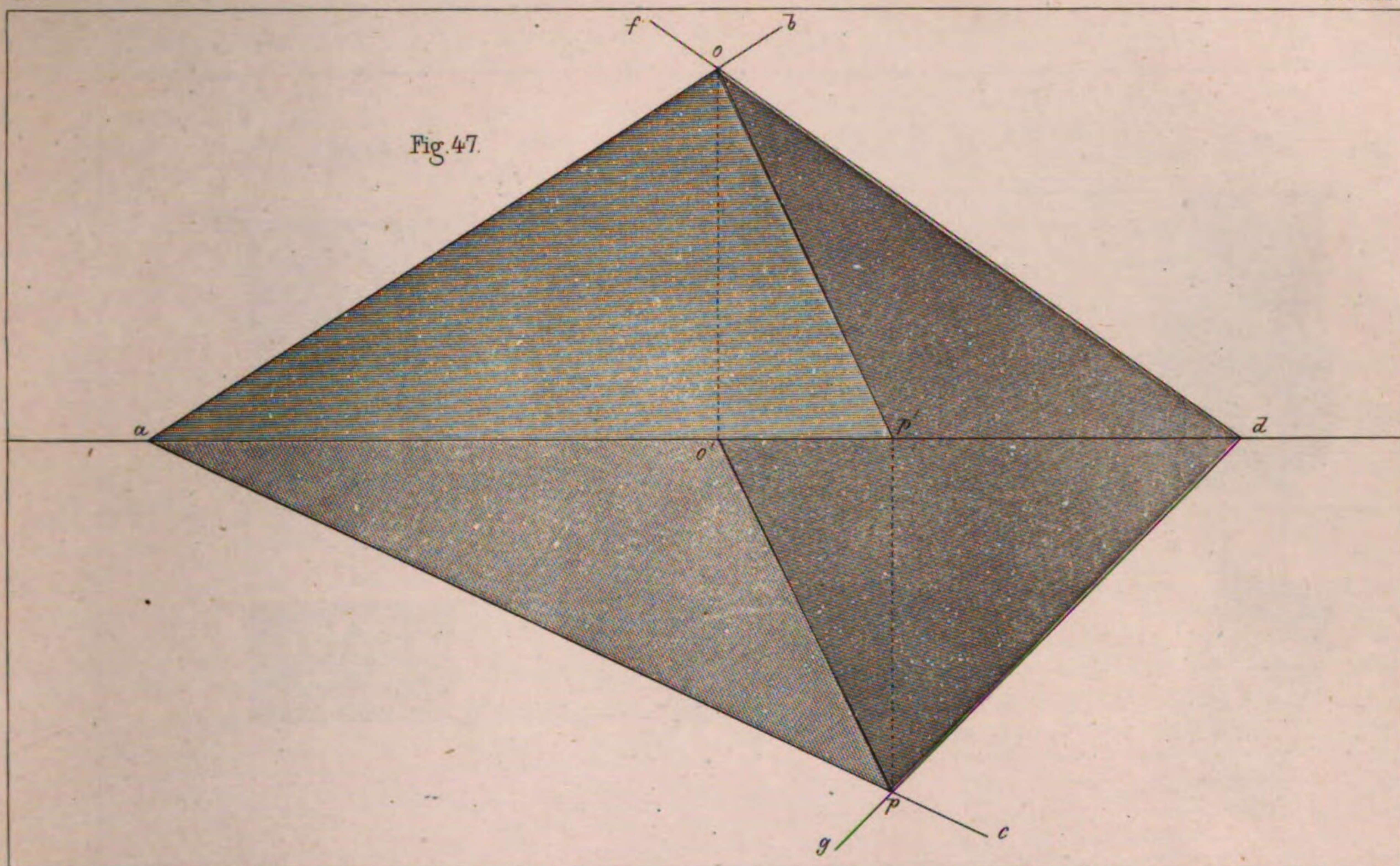


Fig. 48.

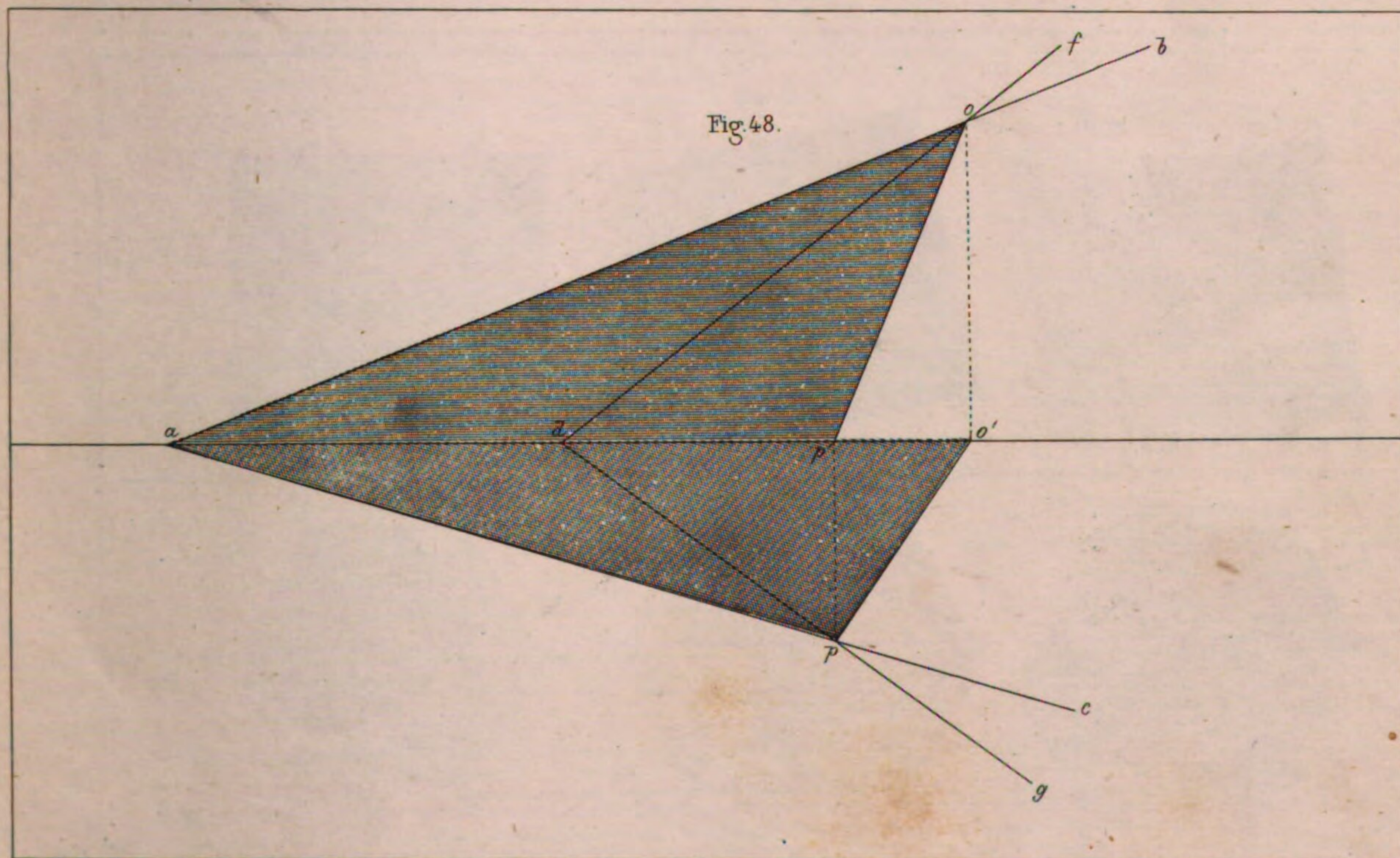


Fig. 49.

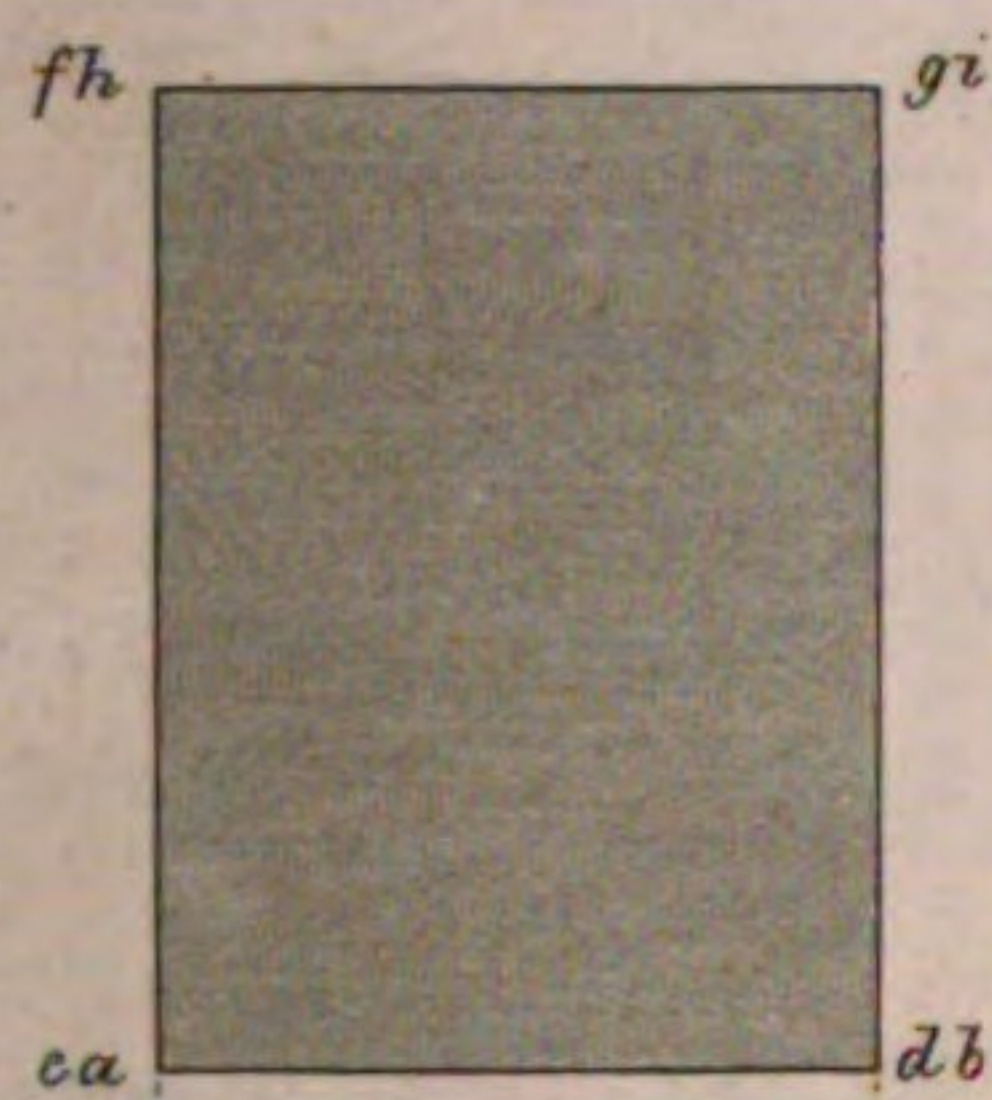


Fig. 50.

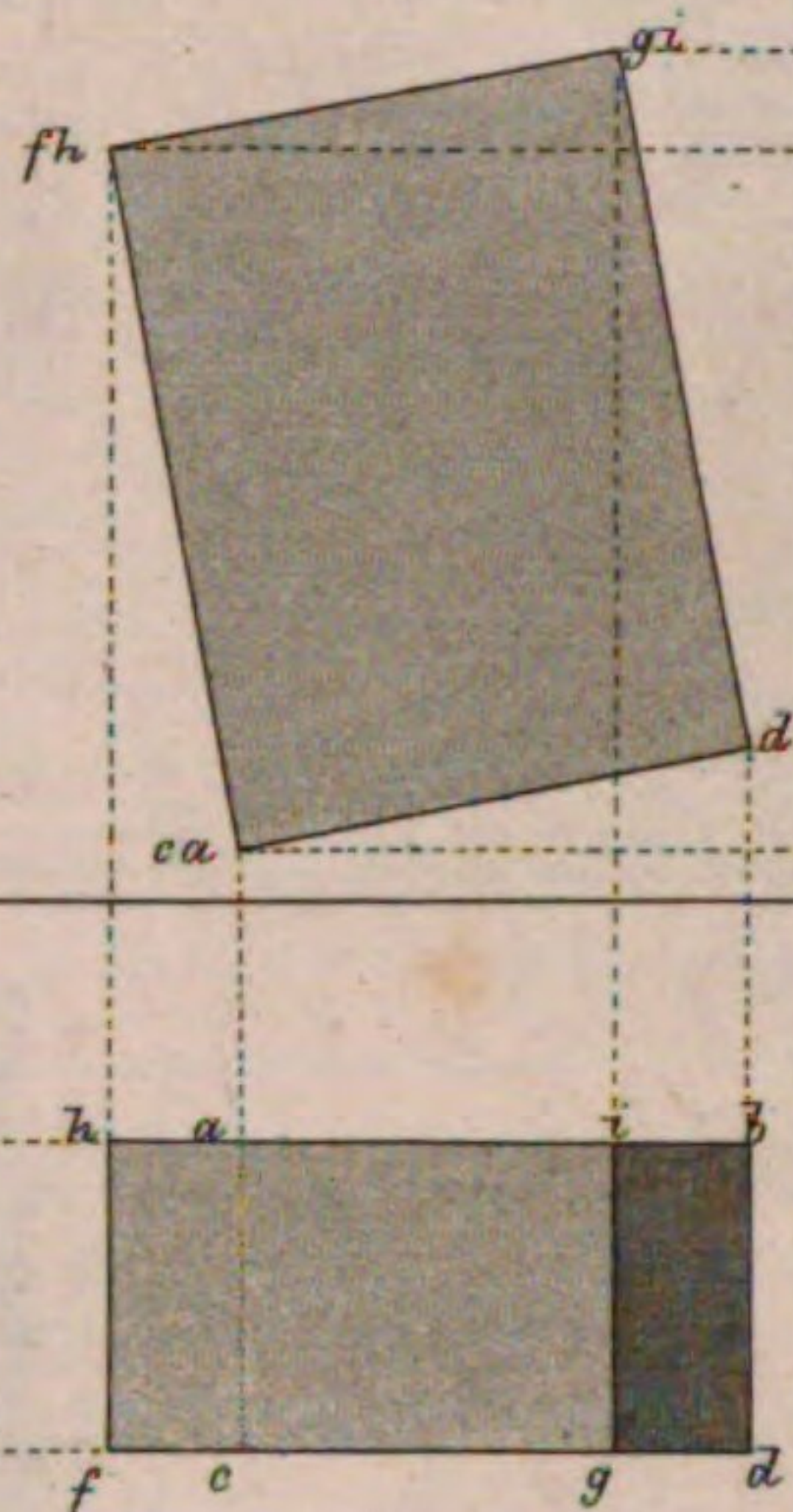


Fig. 51.

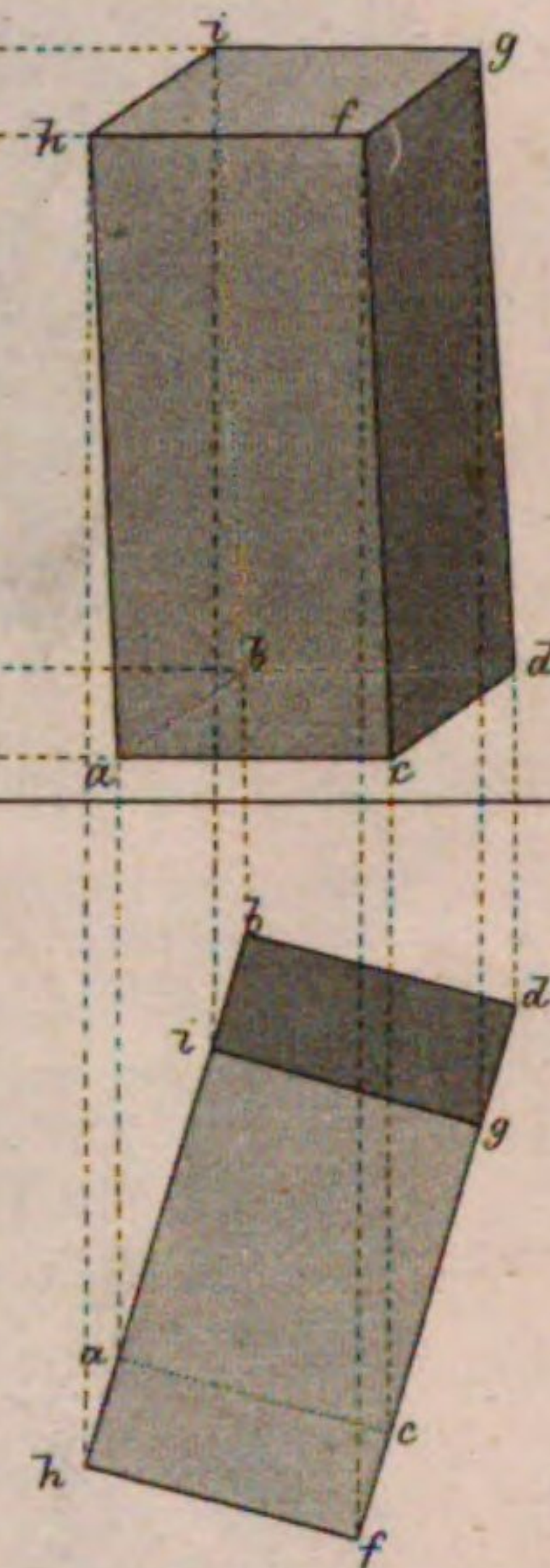


Fig. 52.

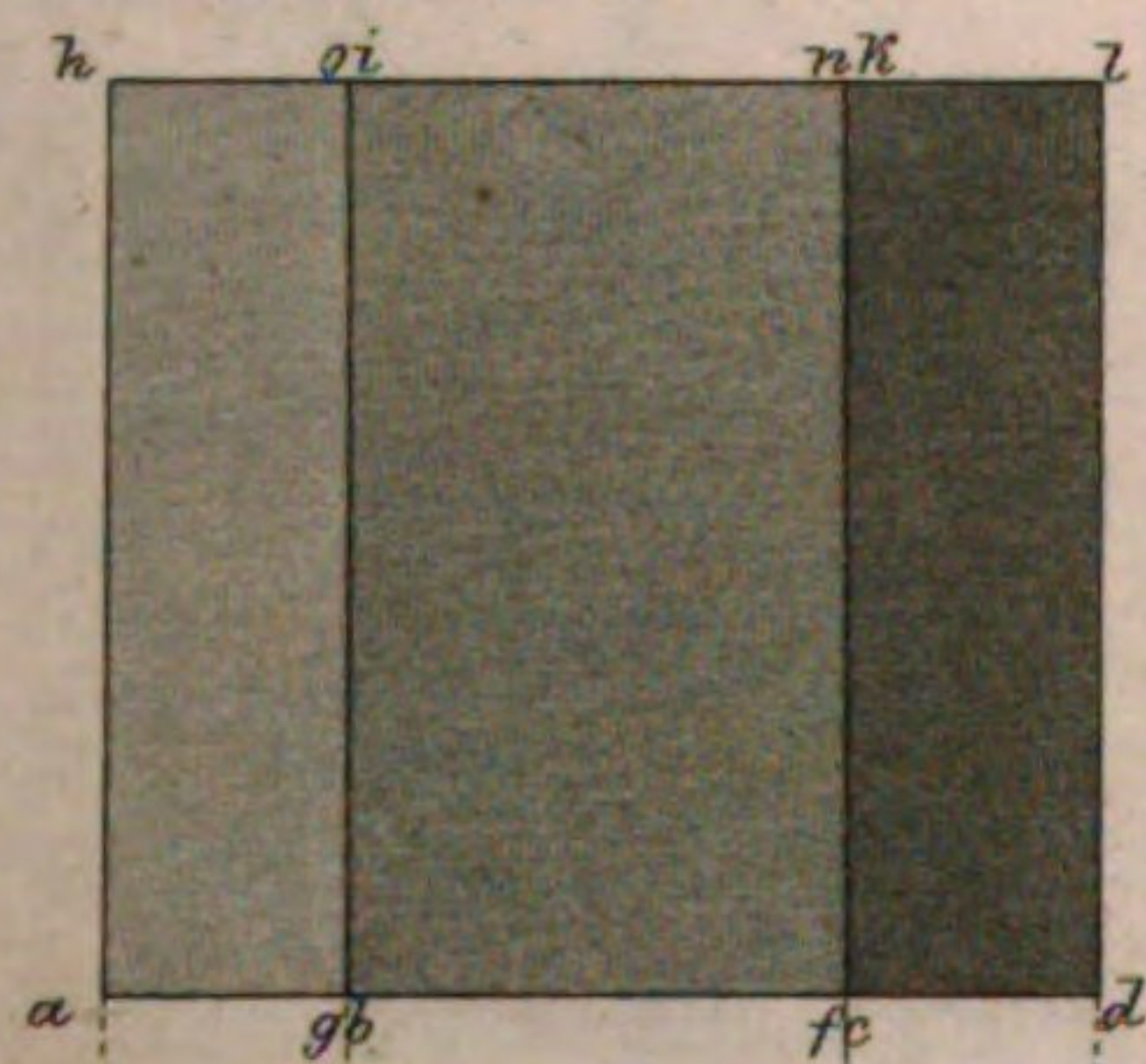


Fig. 53.

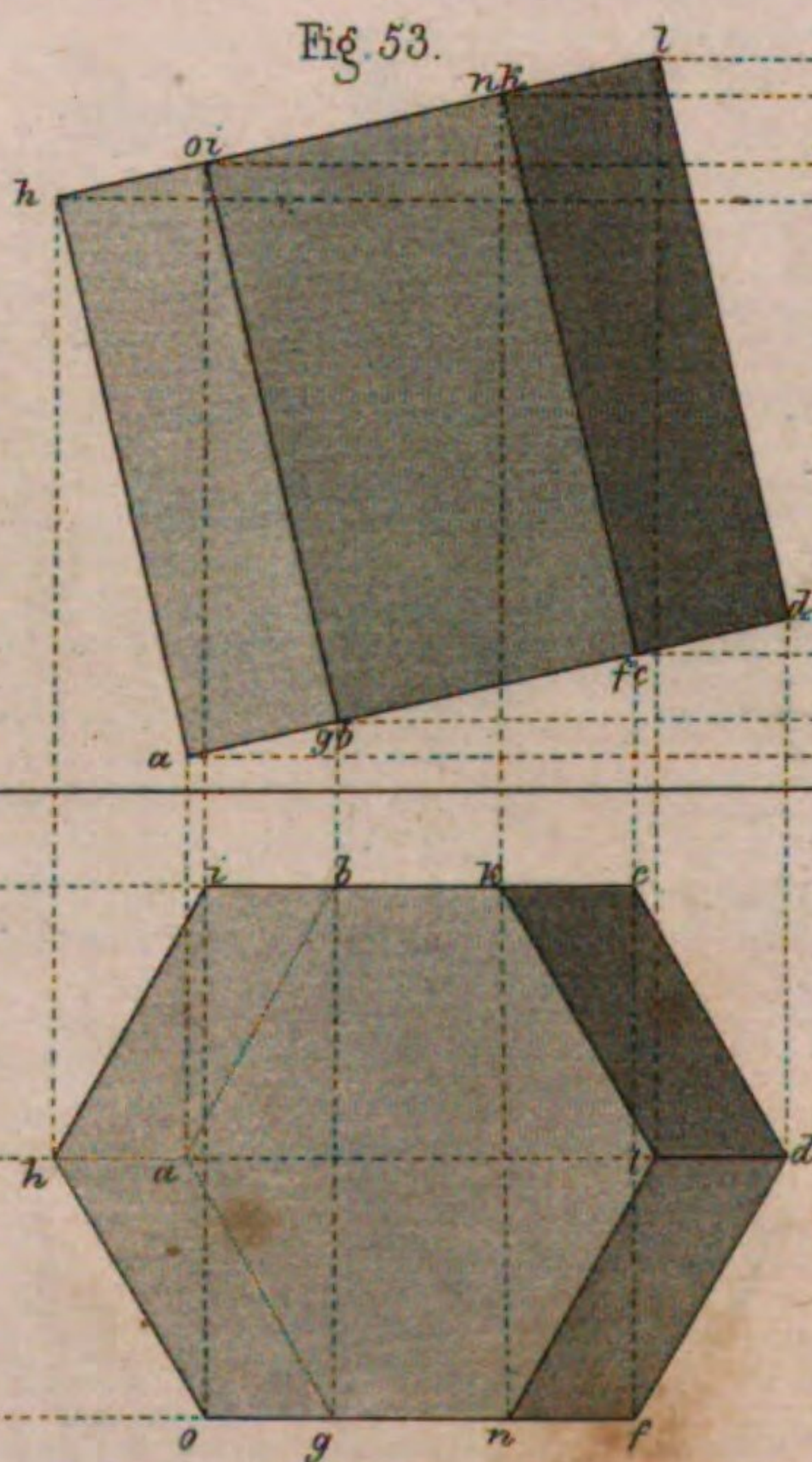
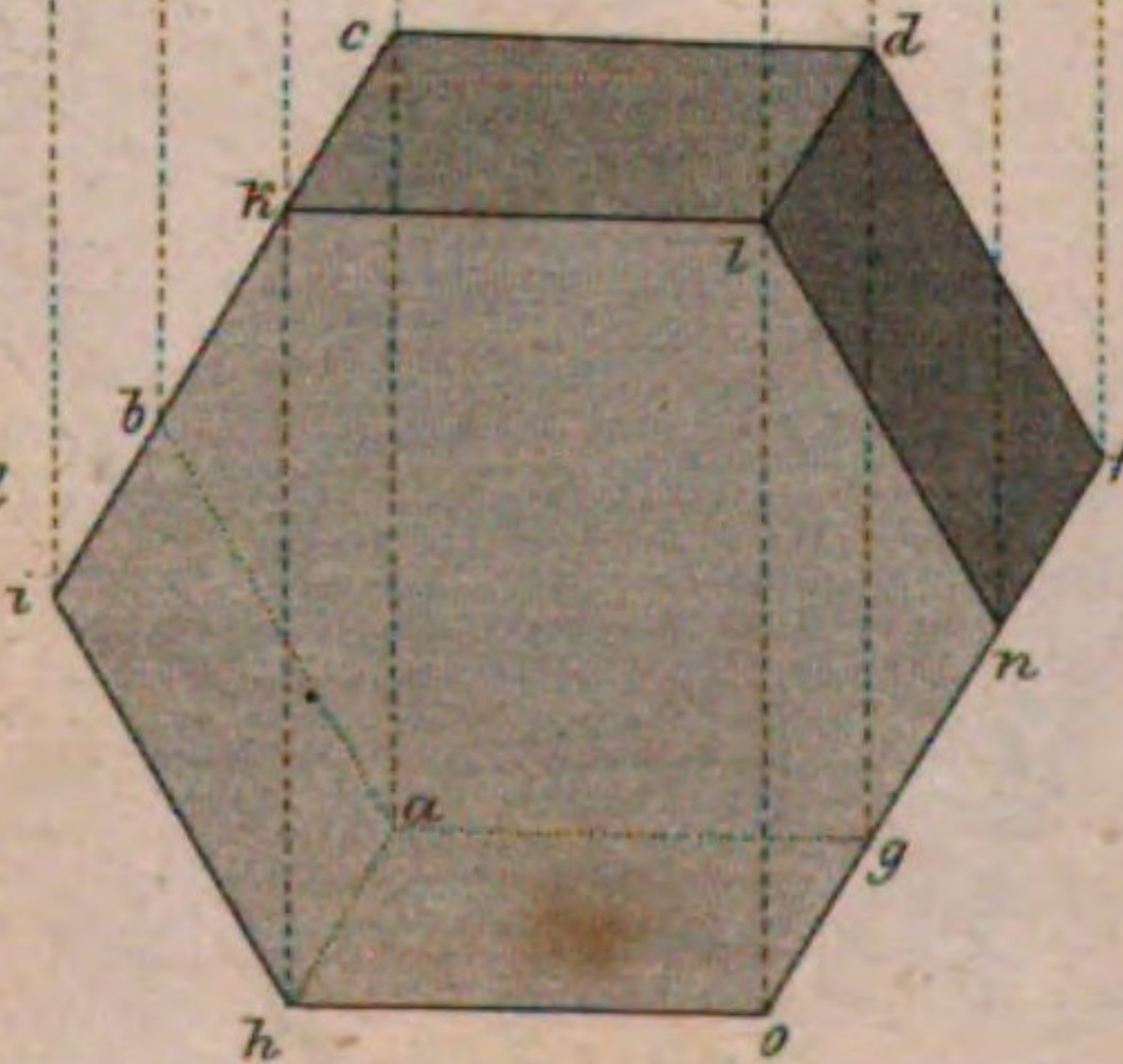
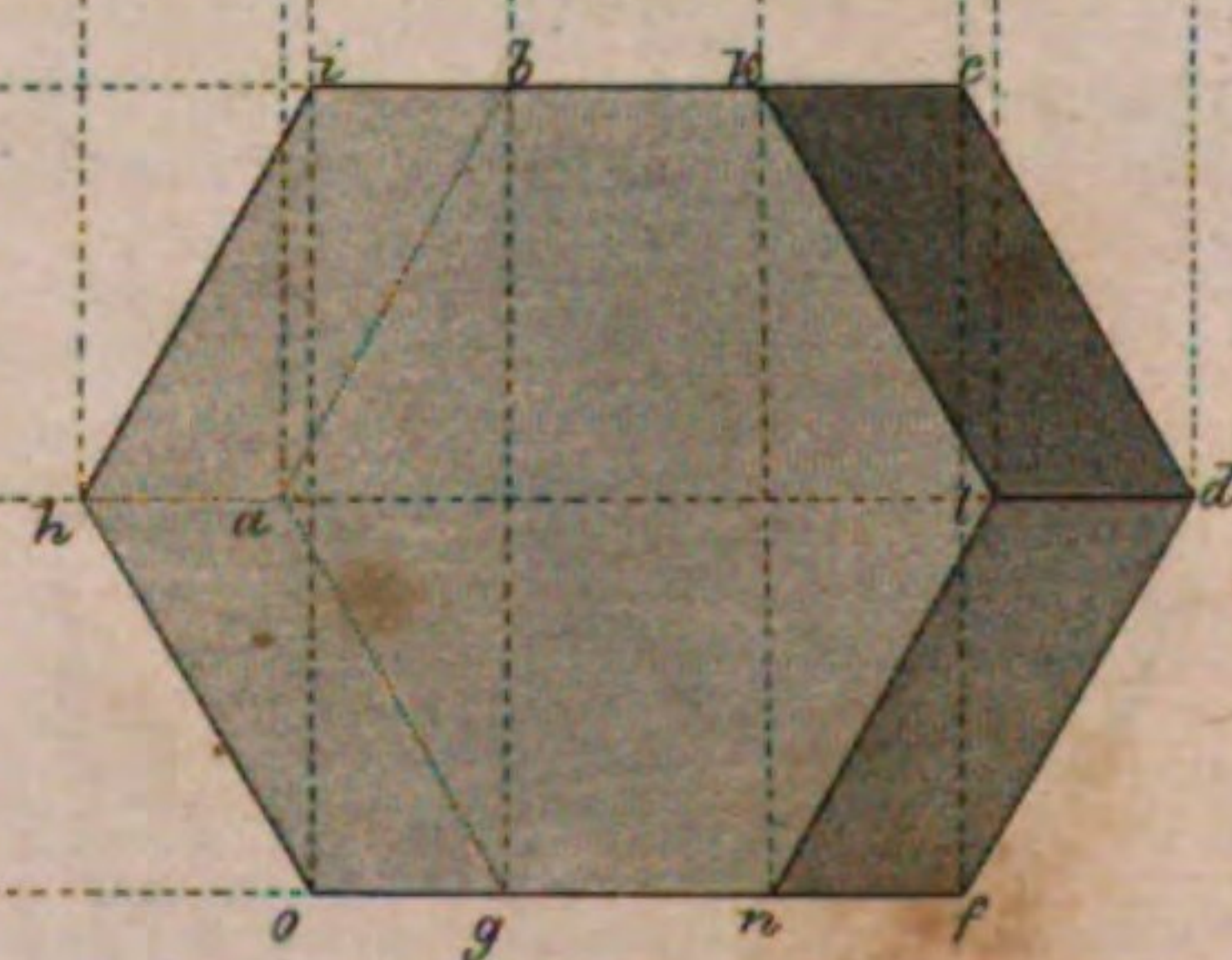
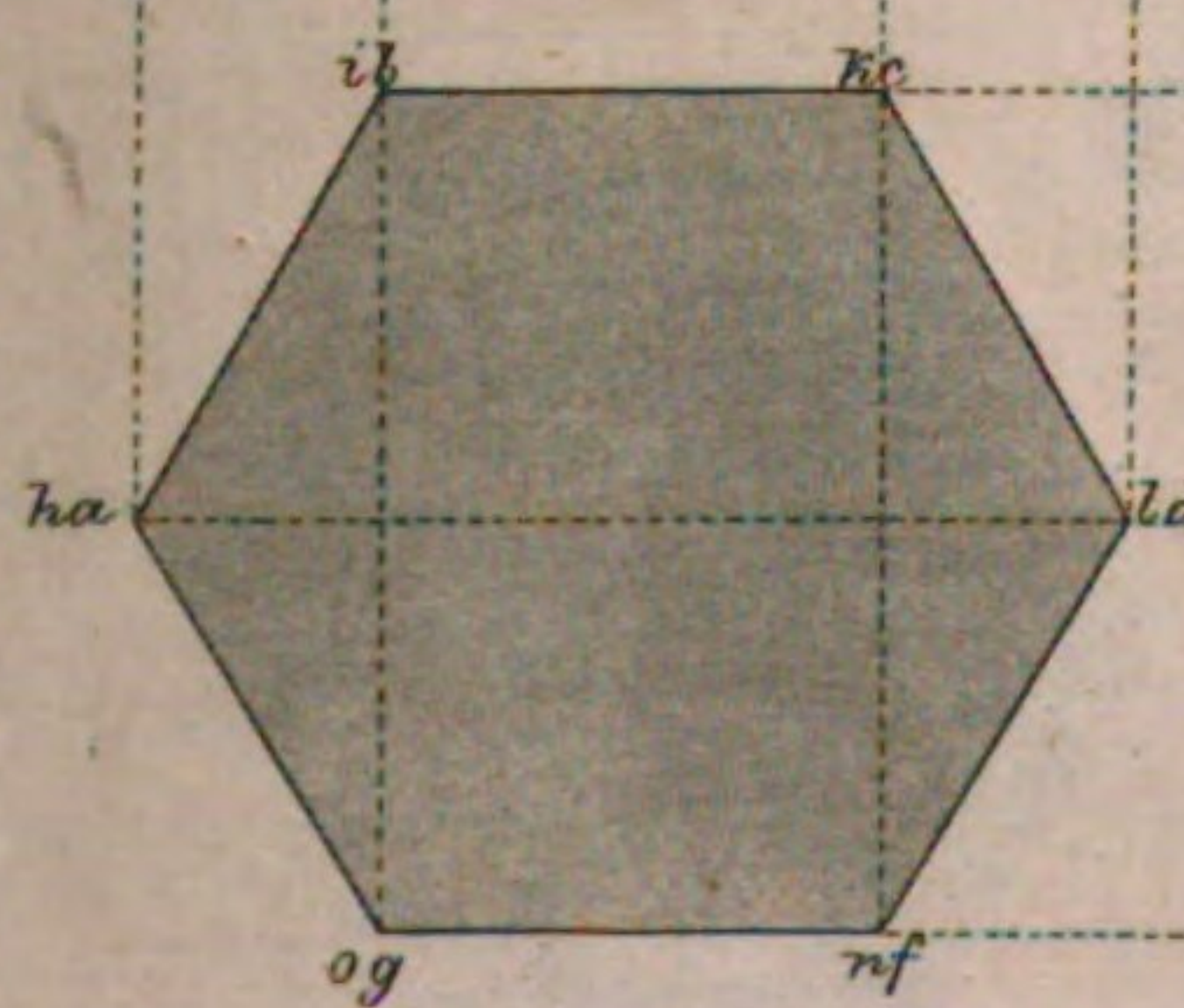
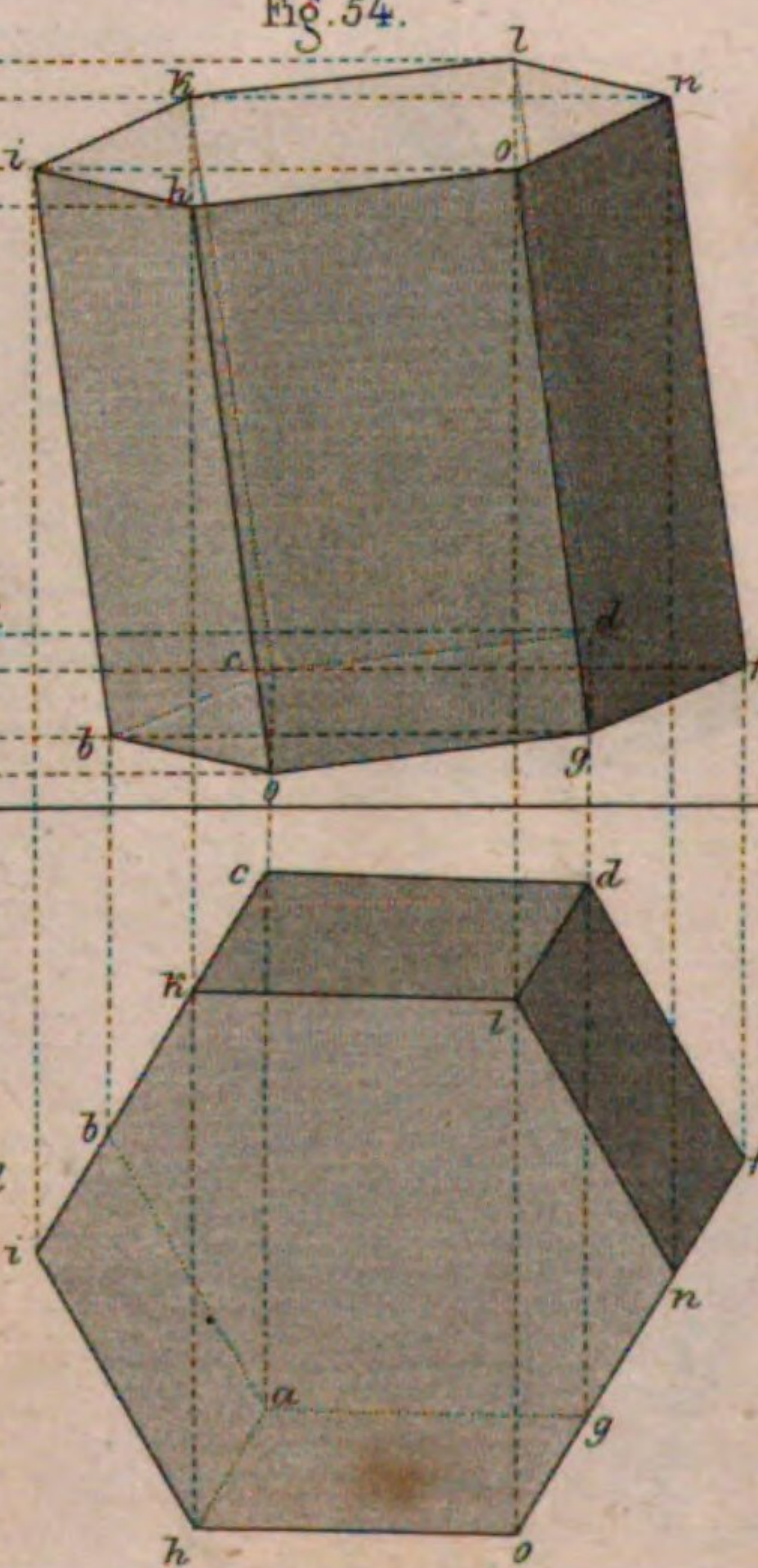


Fig. 54.



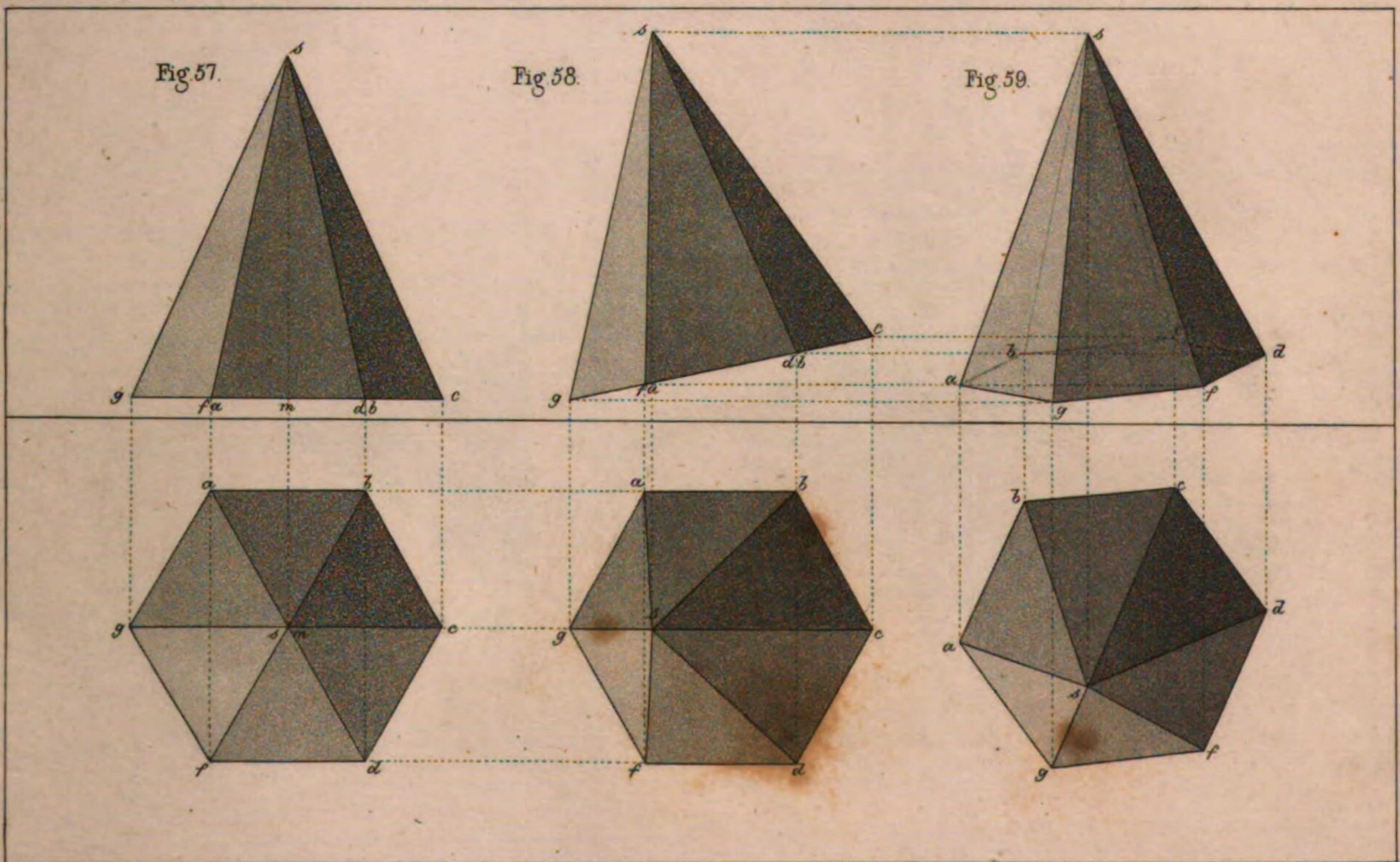
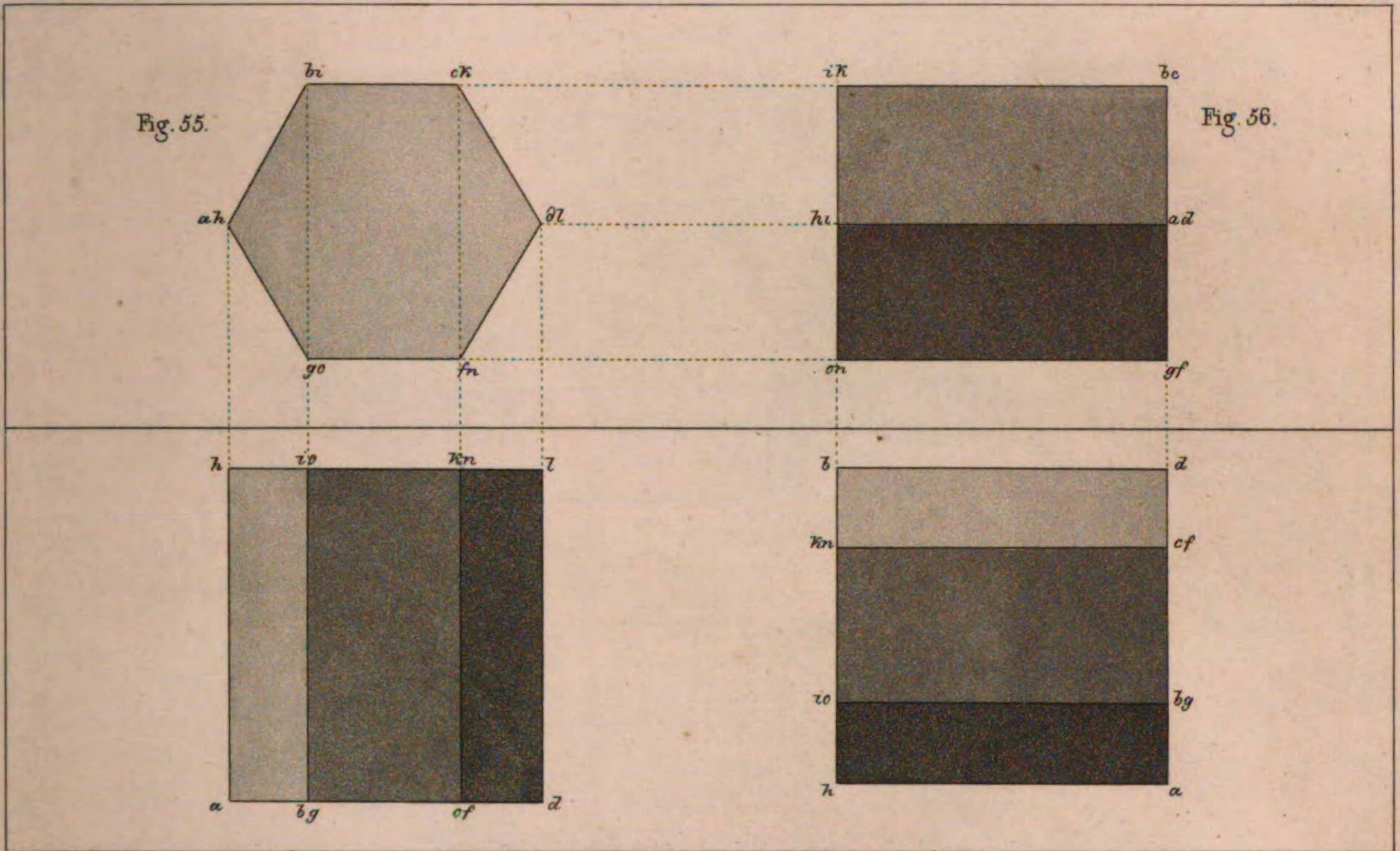


Fig 60.

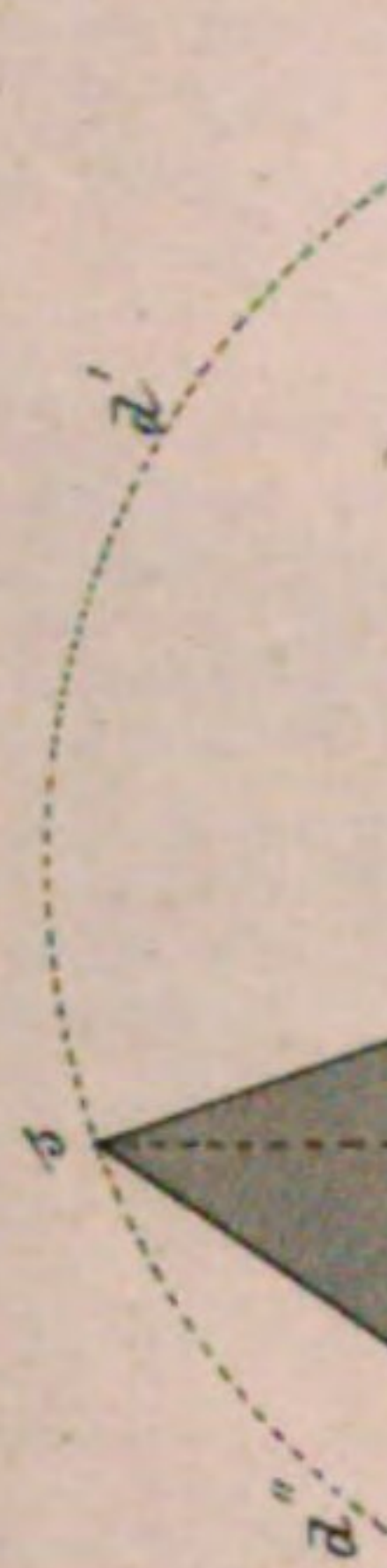


Fig 61.

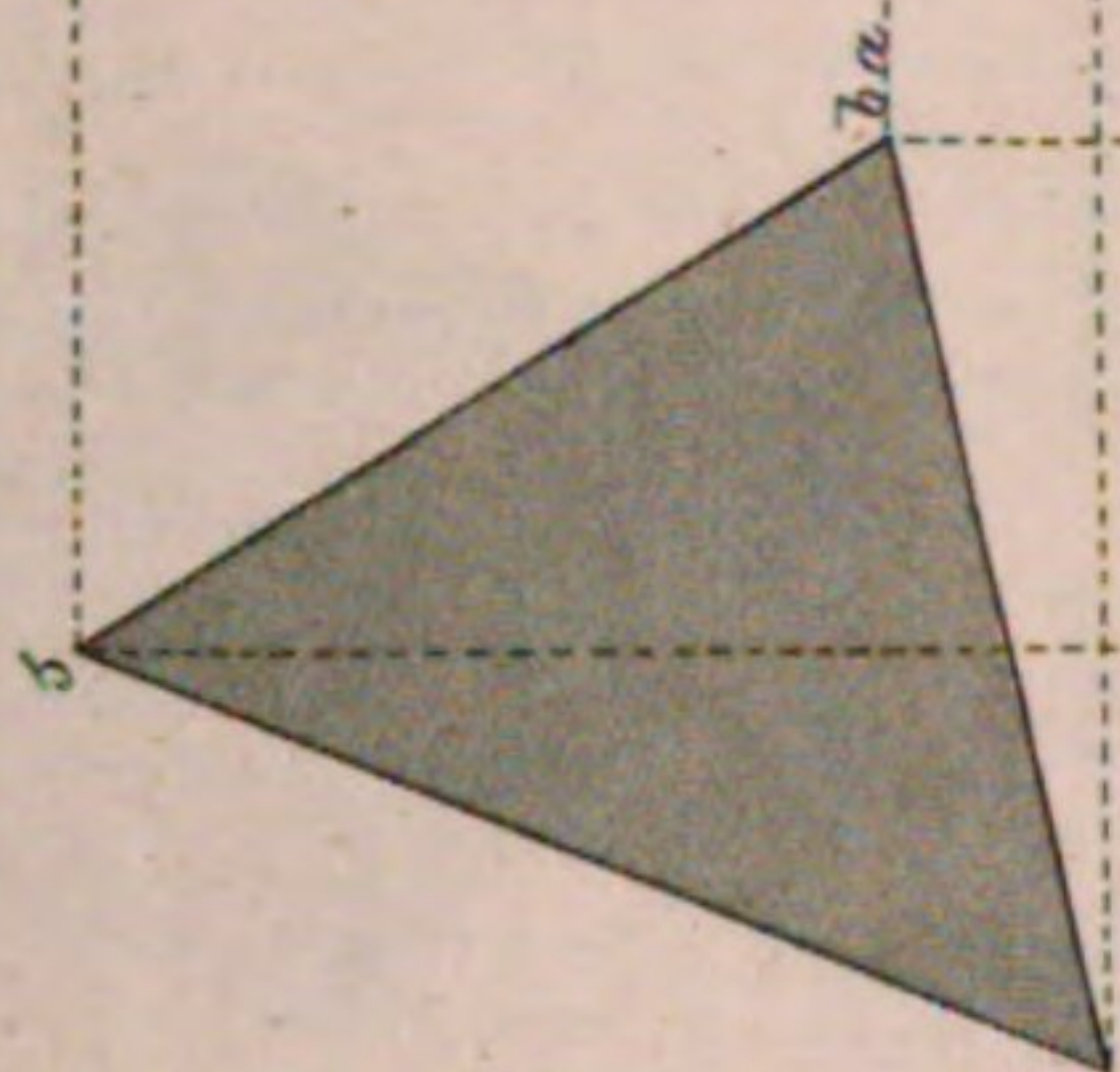


Fig 62.

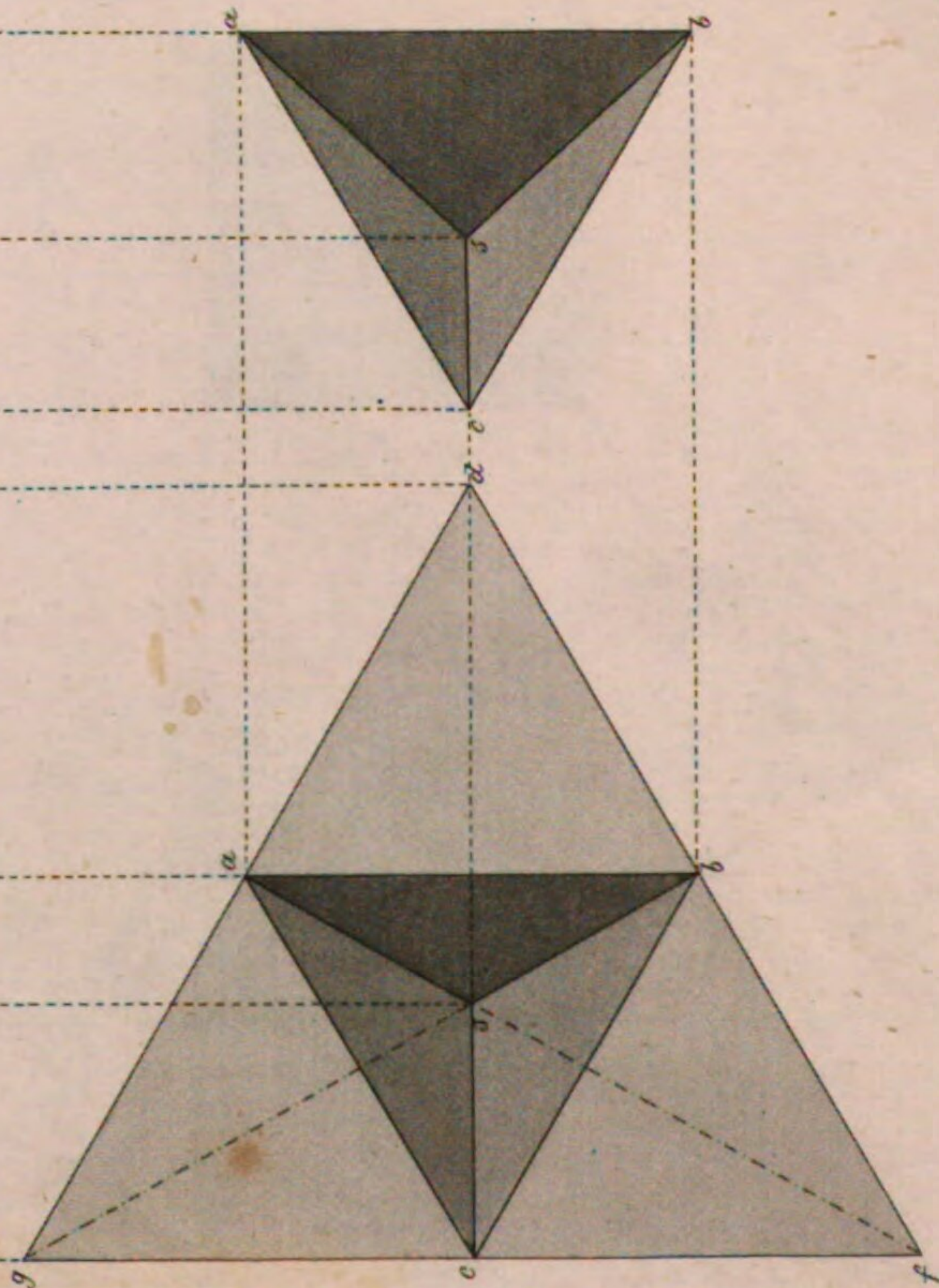
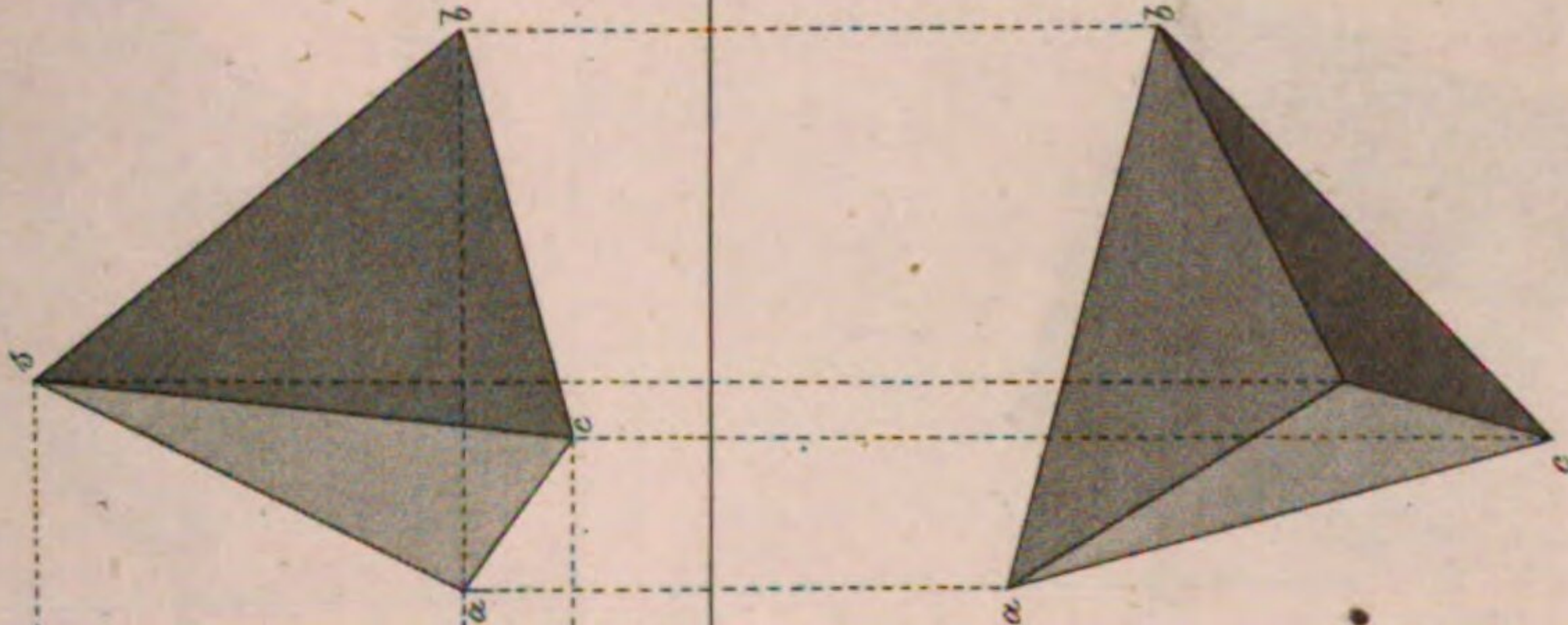


Fig 63.

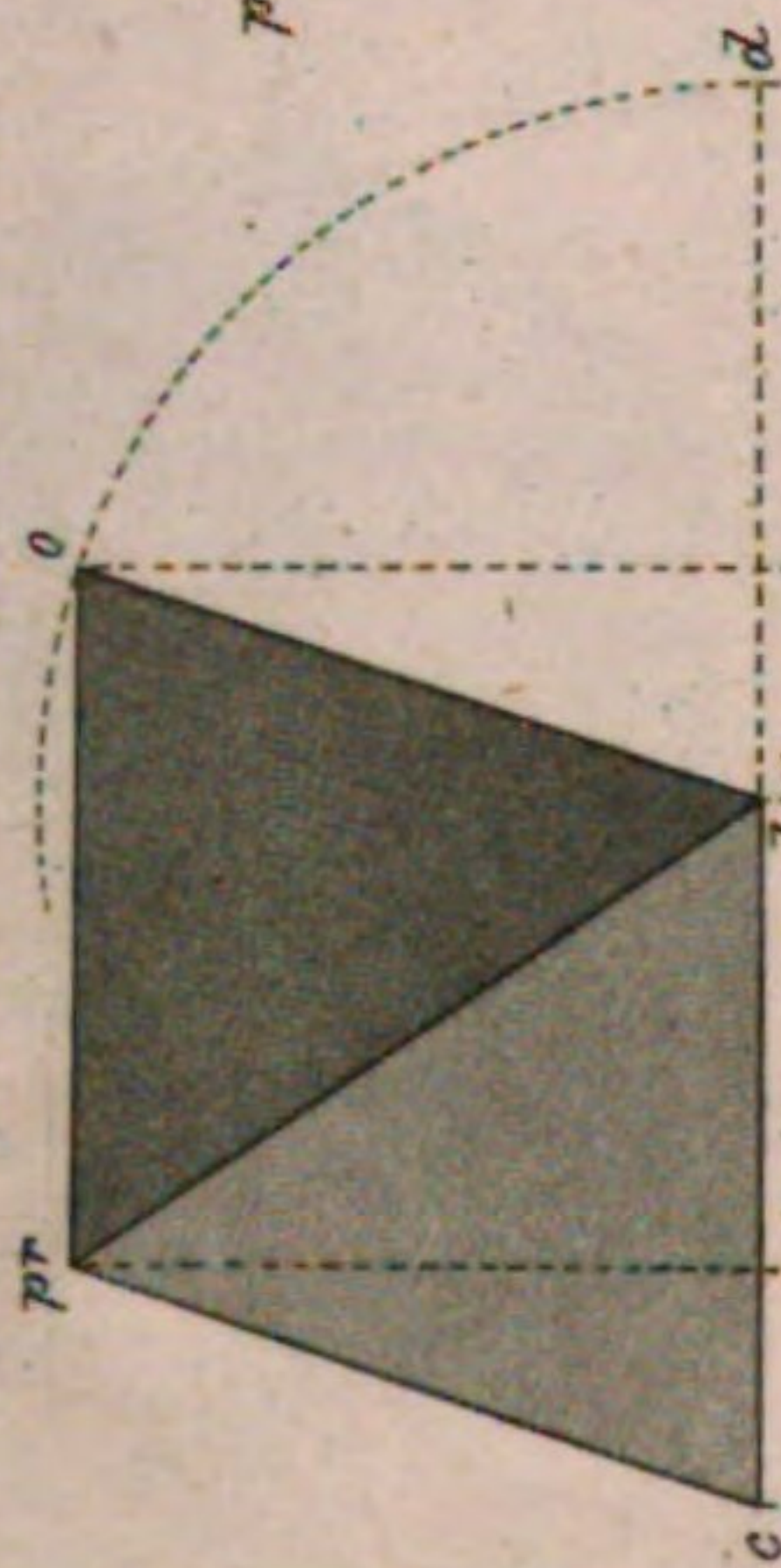


Fig 63.

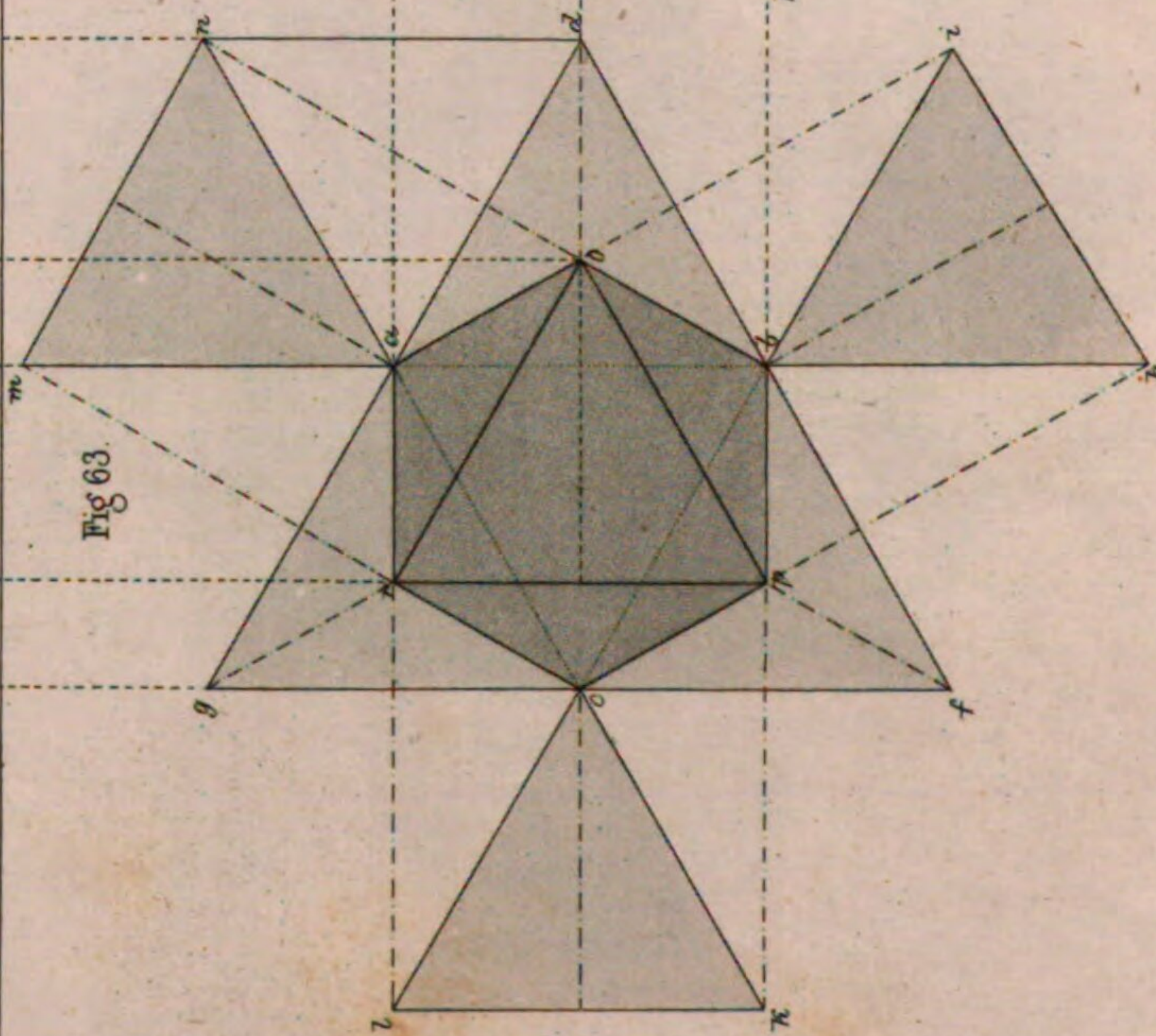


Fig 64.

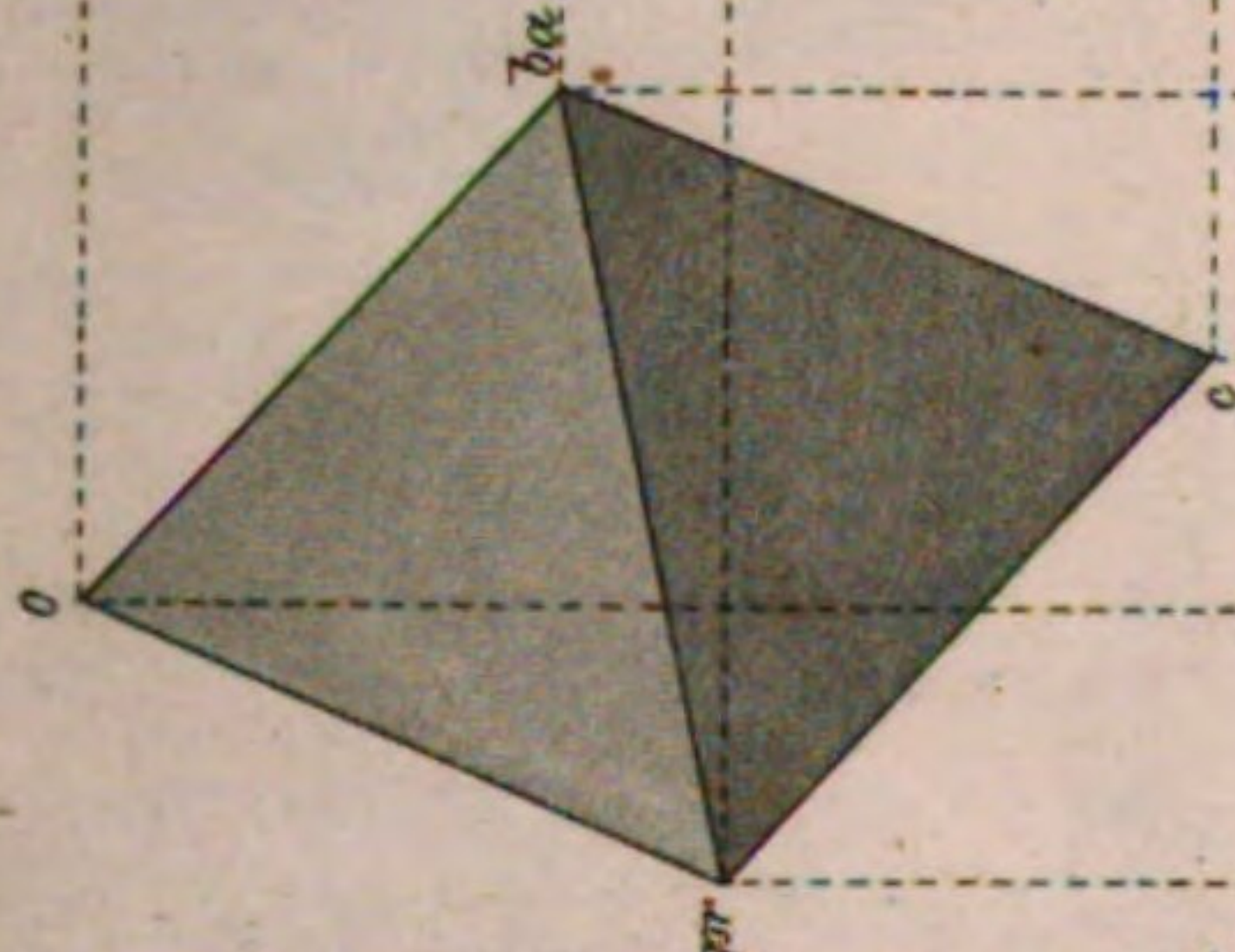


Fig 64.

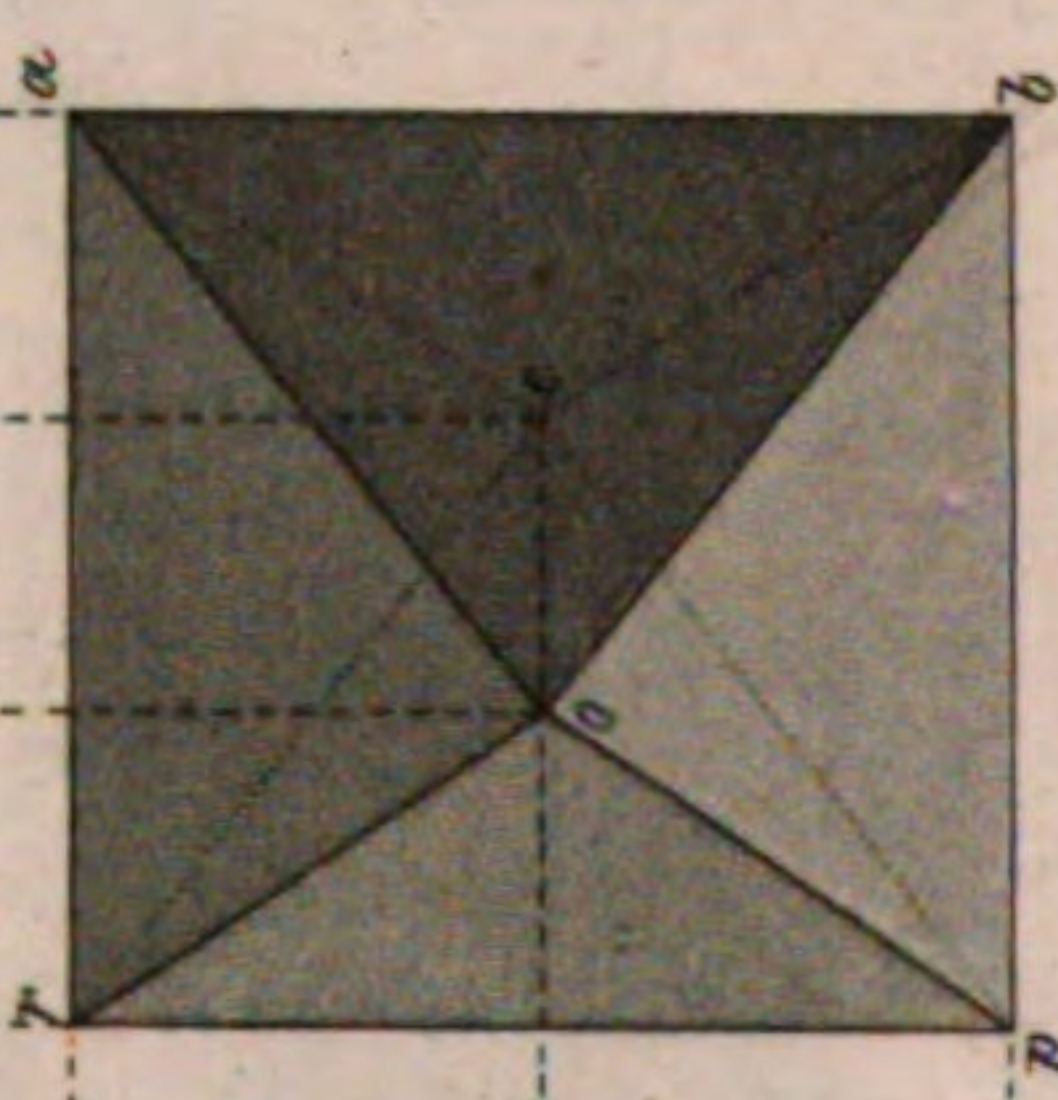


Fig 65.

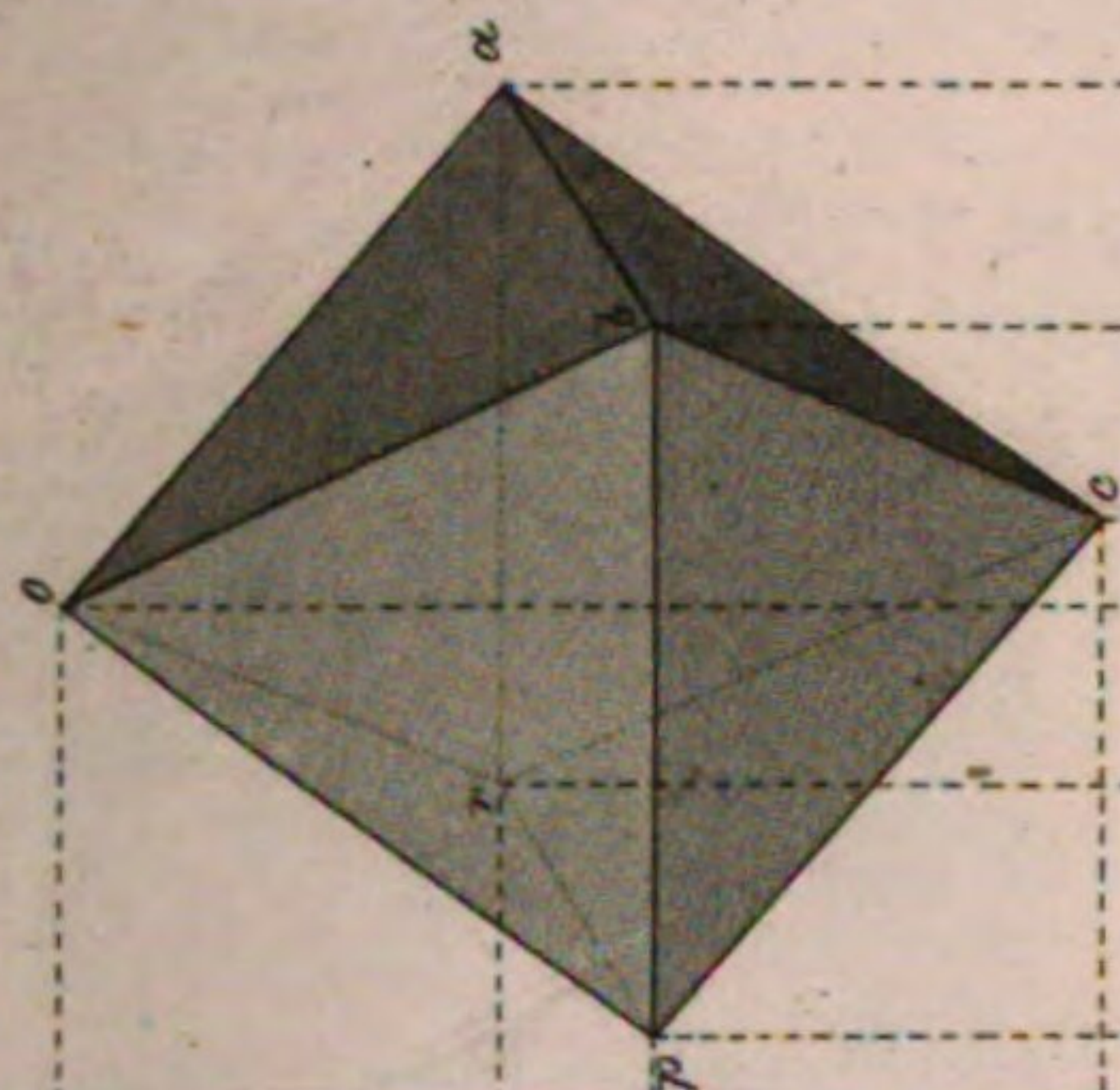


Fig 65.

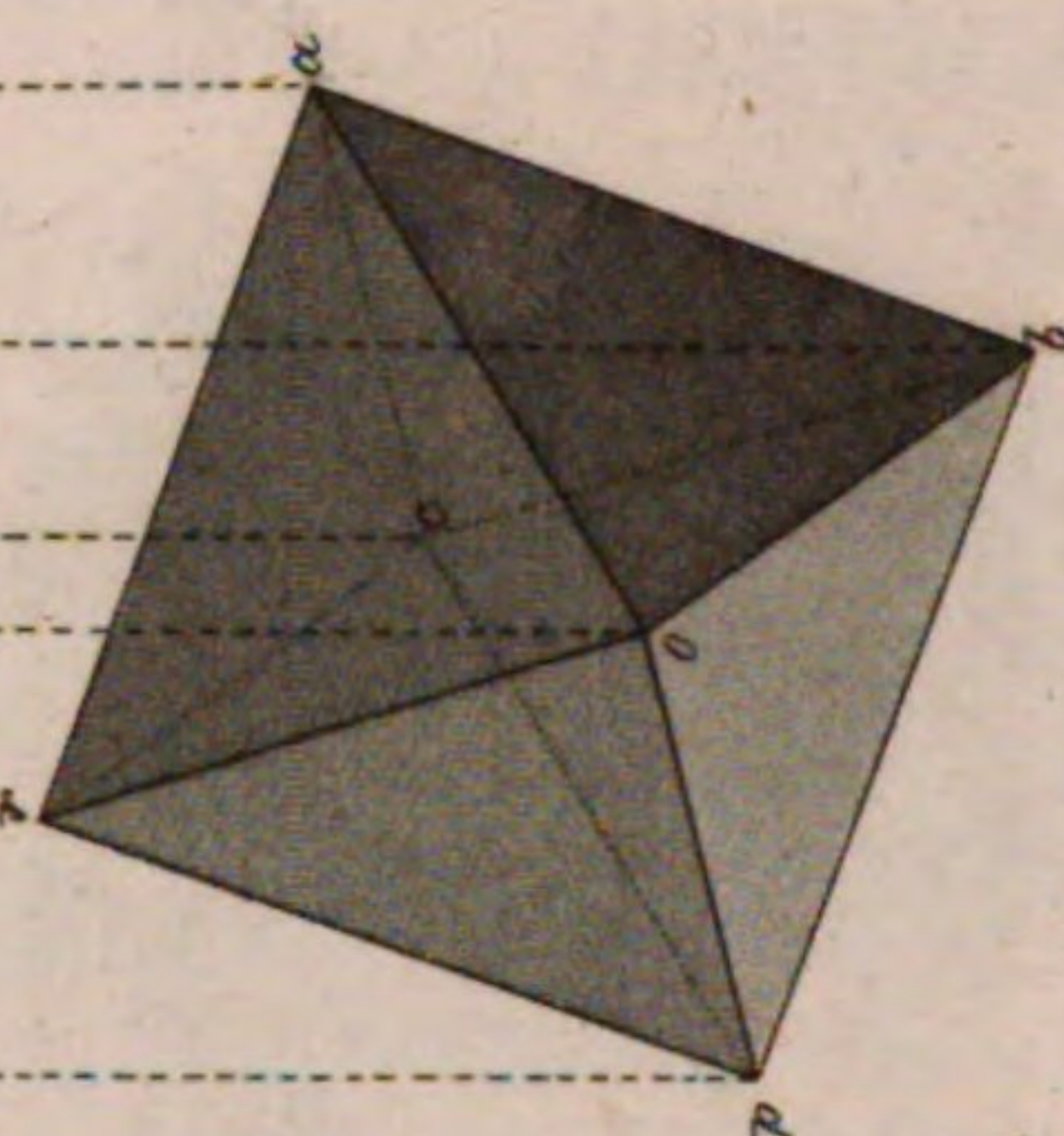


Fig. 67.

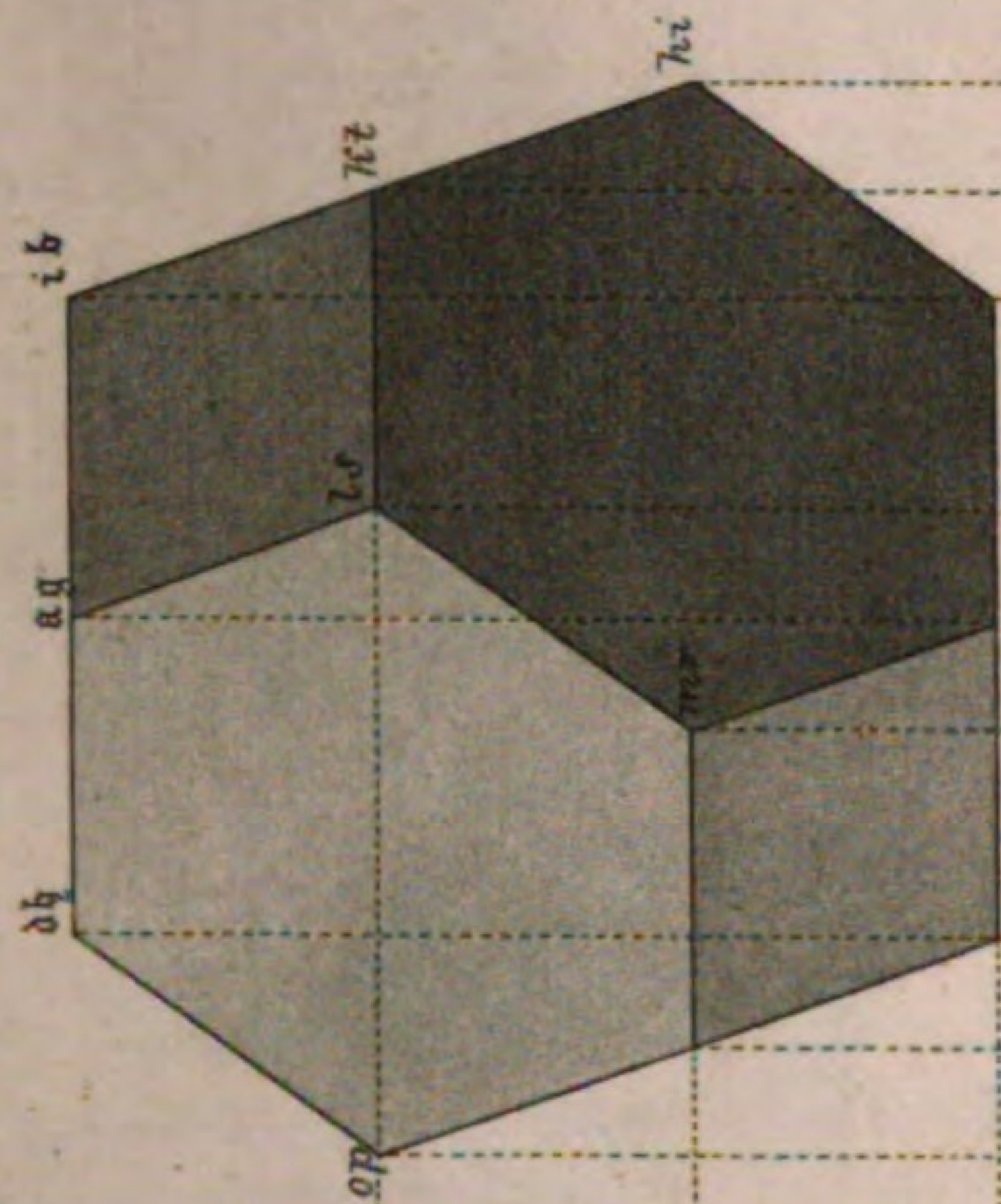


Fig. 66.

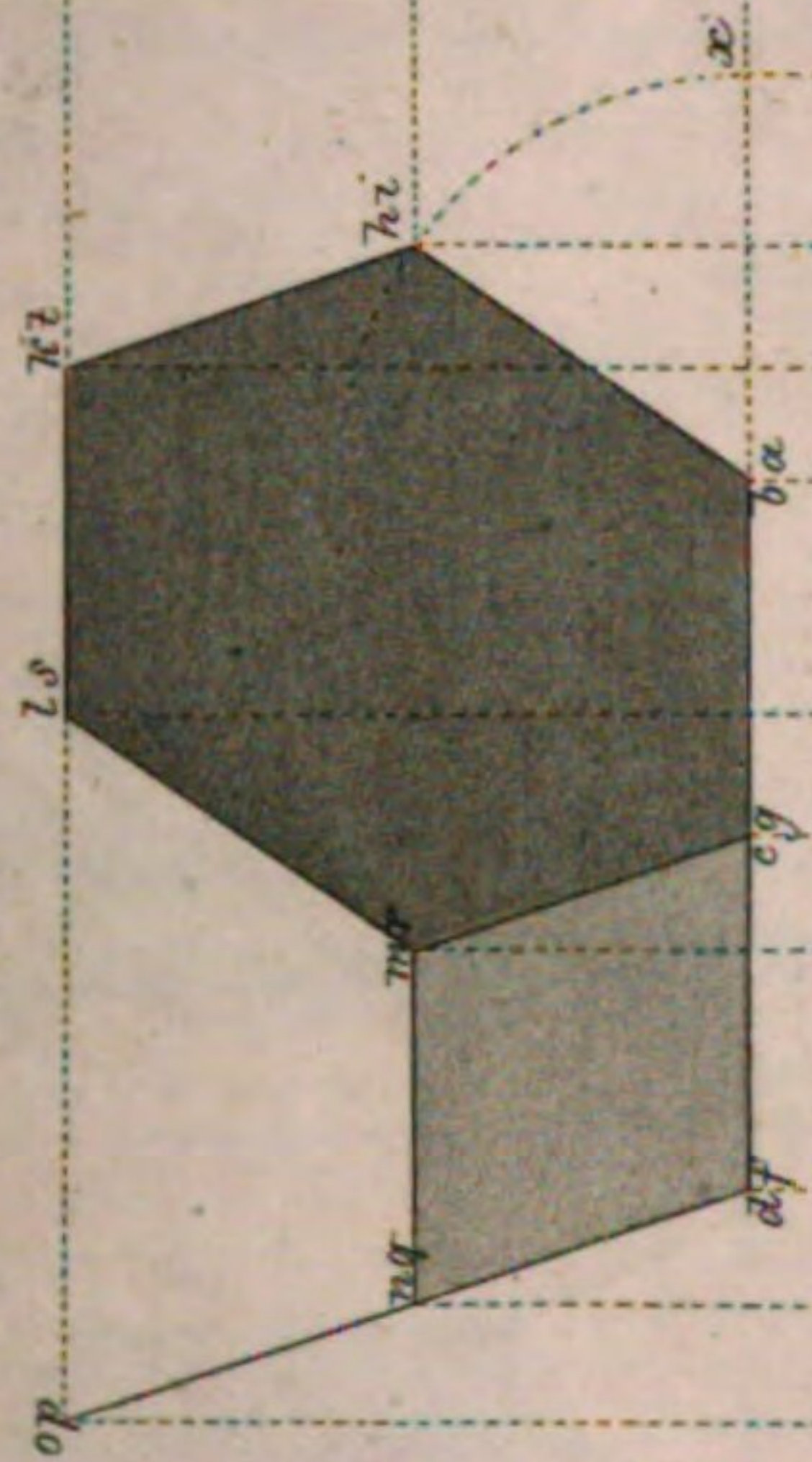


Fig. 67.

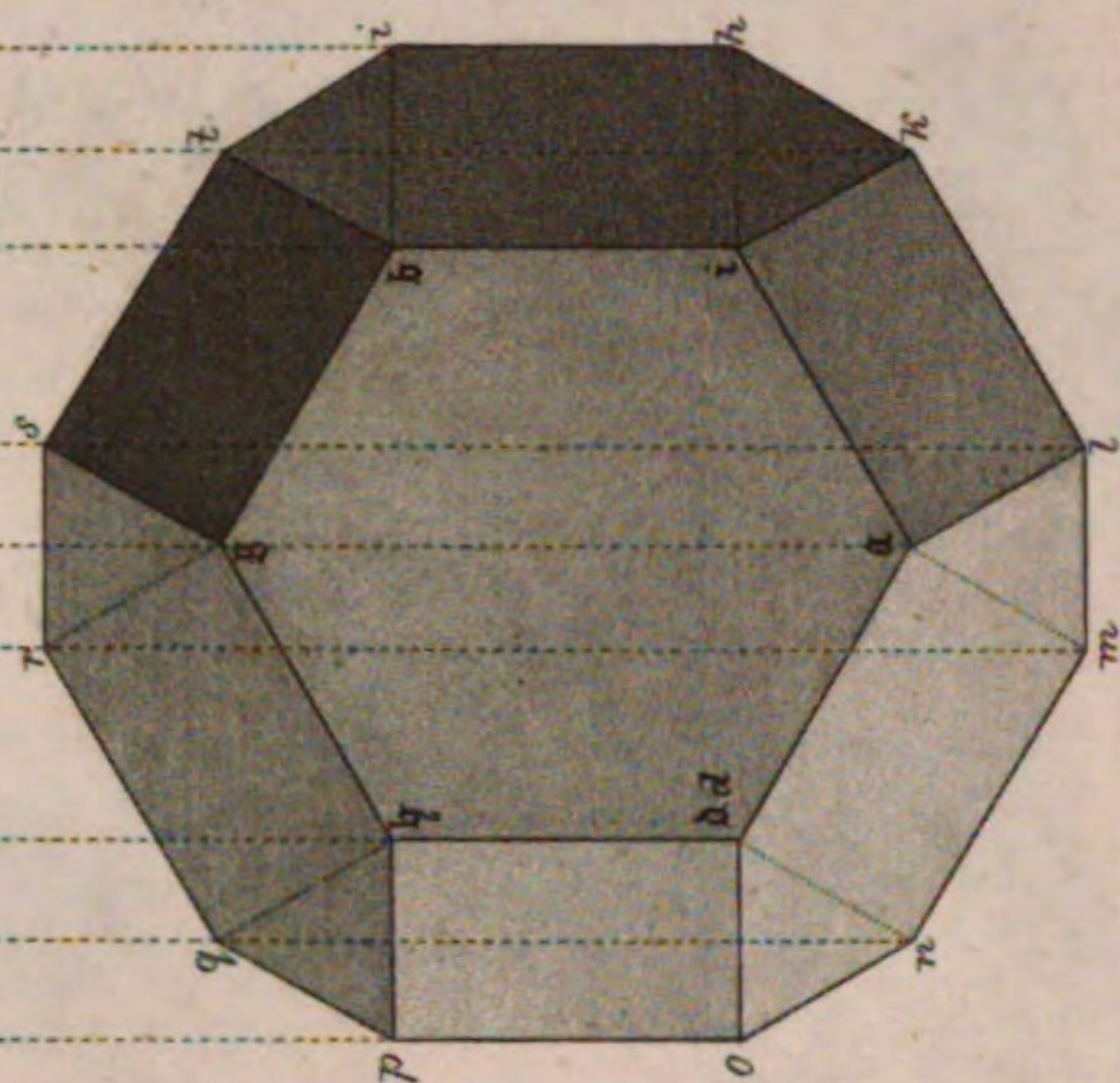


Fig. 66.

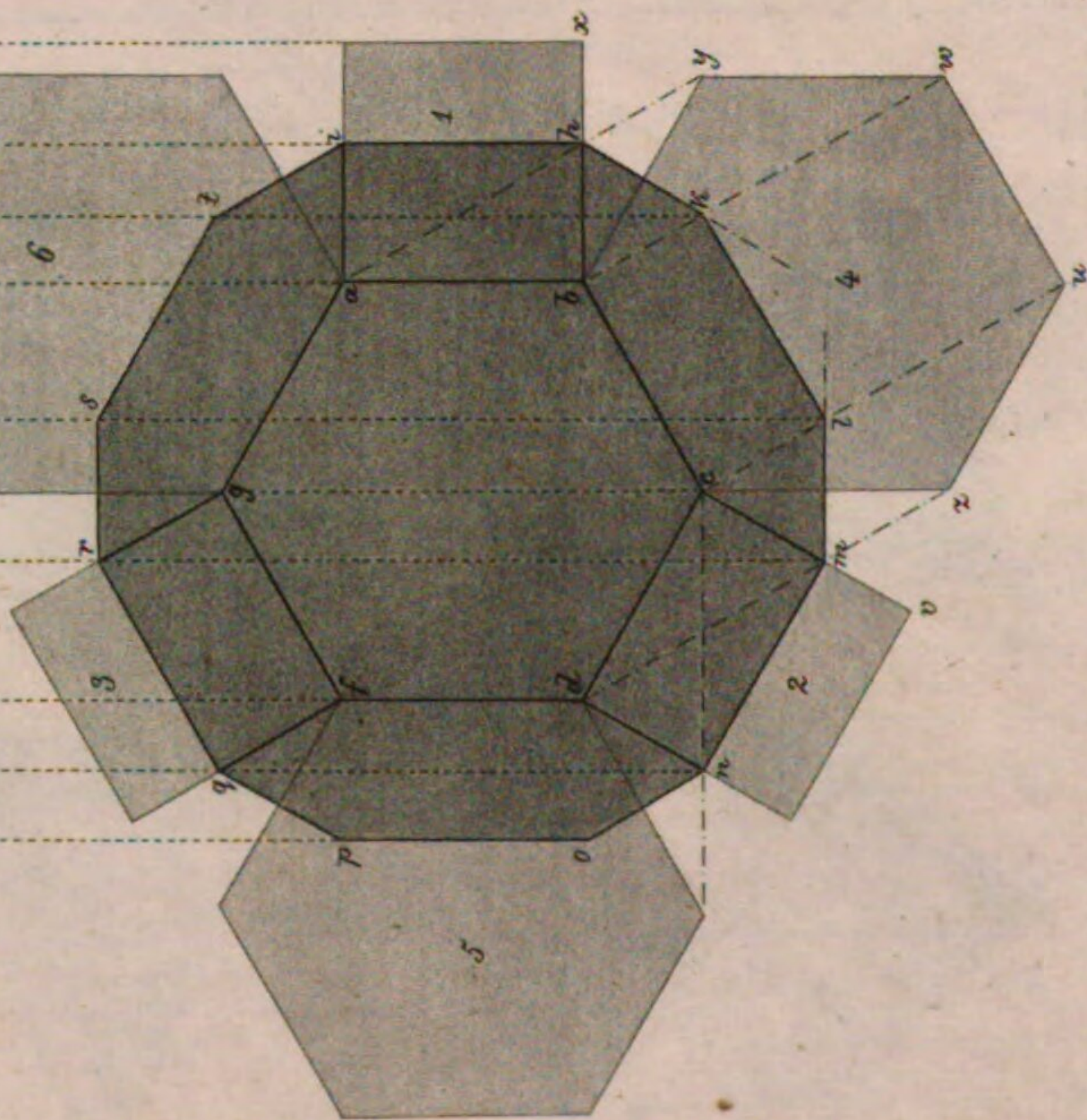


Fig. 68.

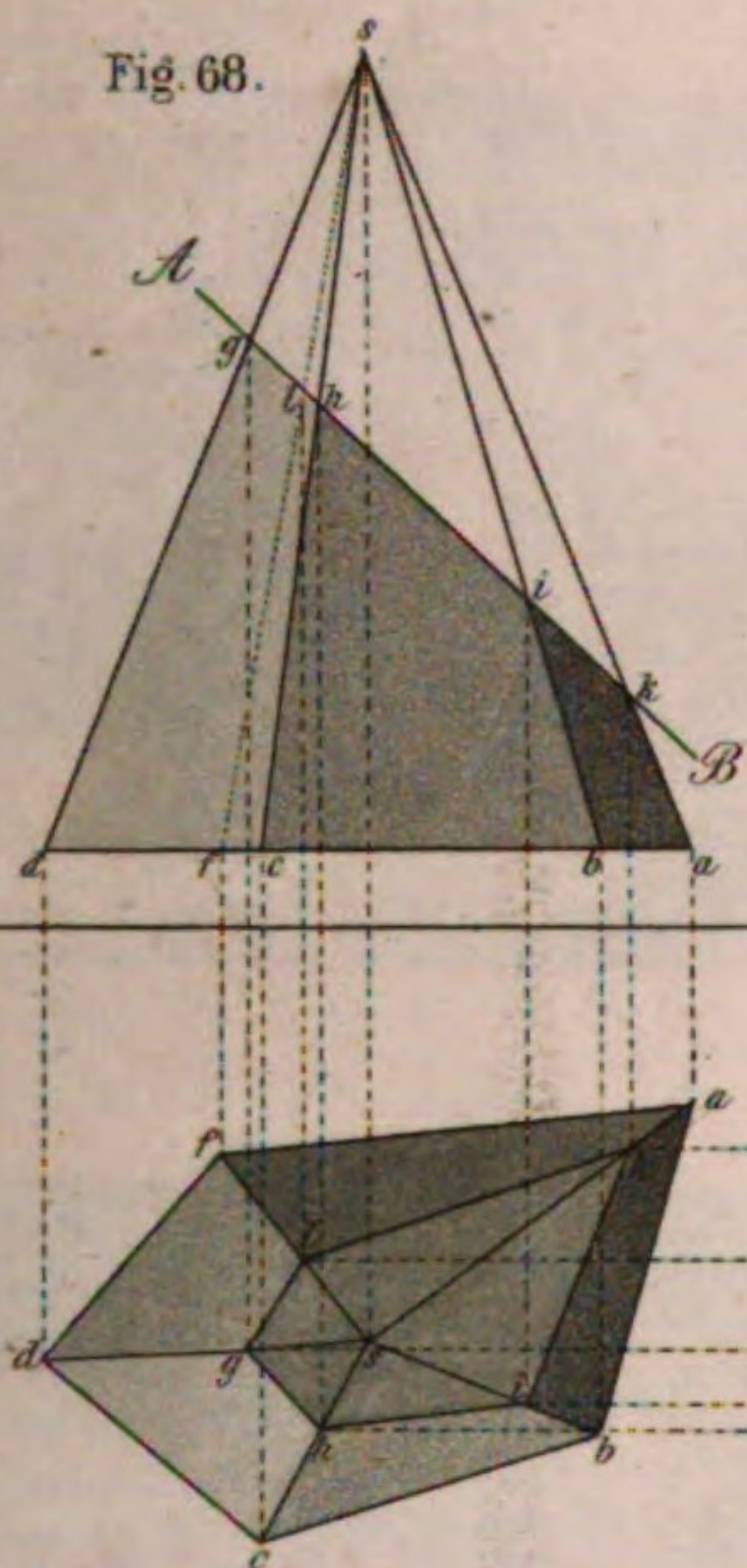


Fig. 69.

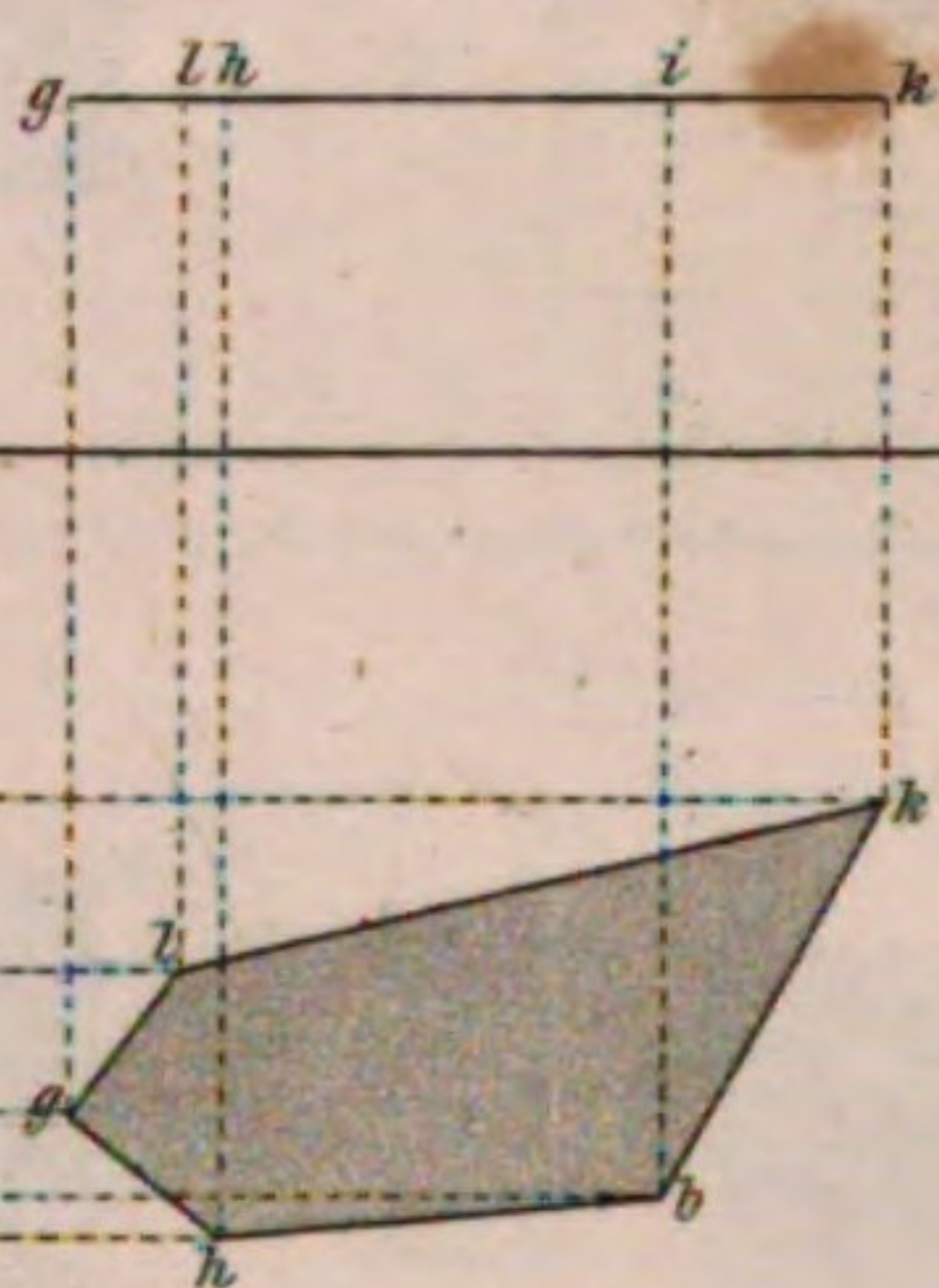


Fig. 70.

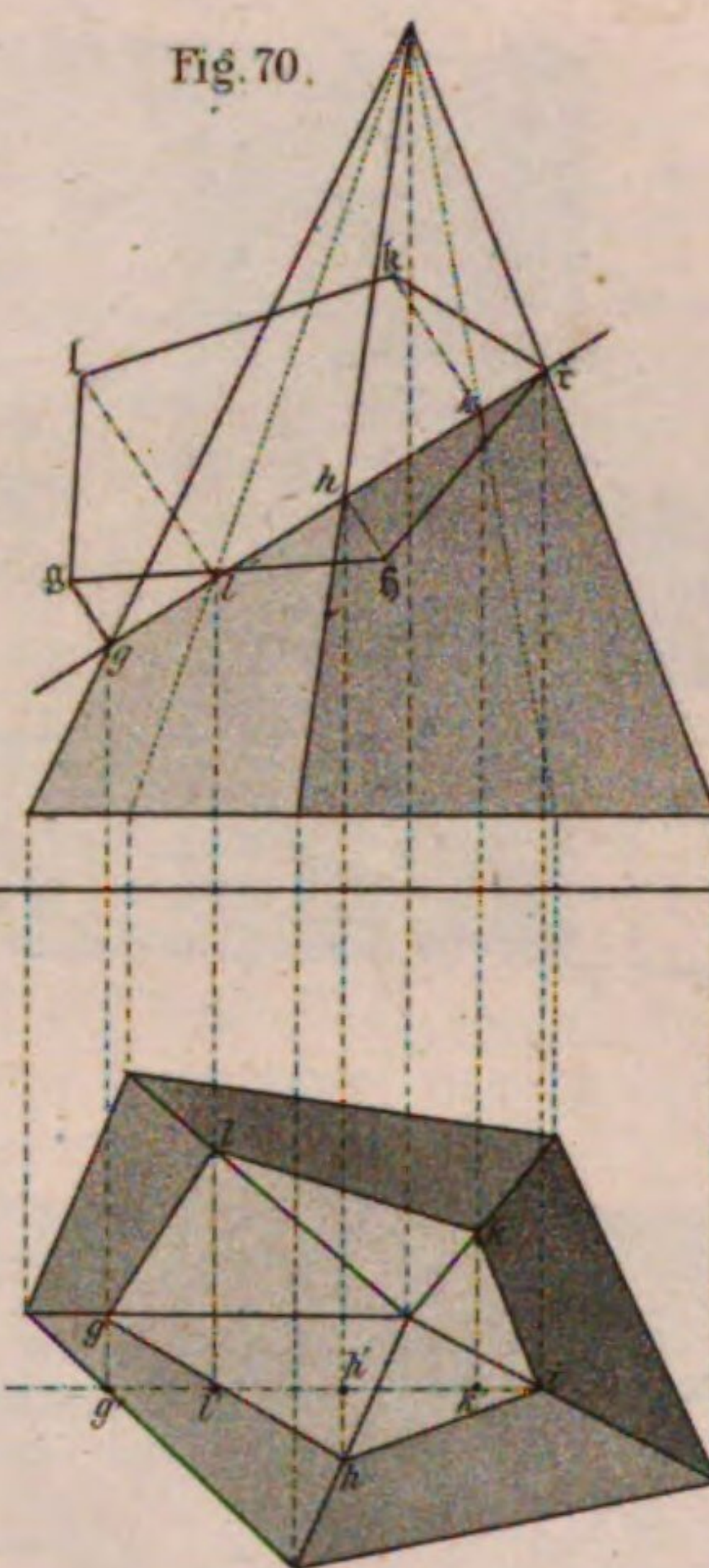


Fig. 71.

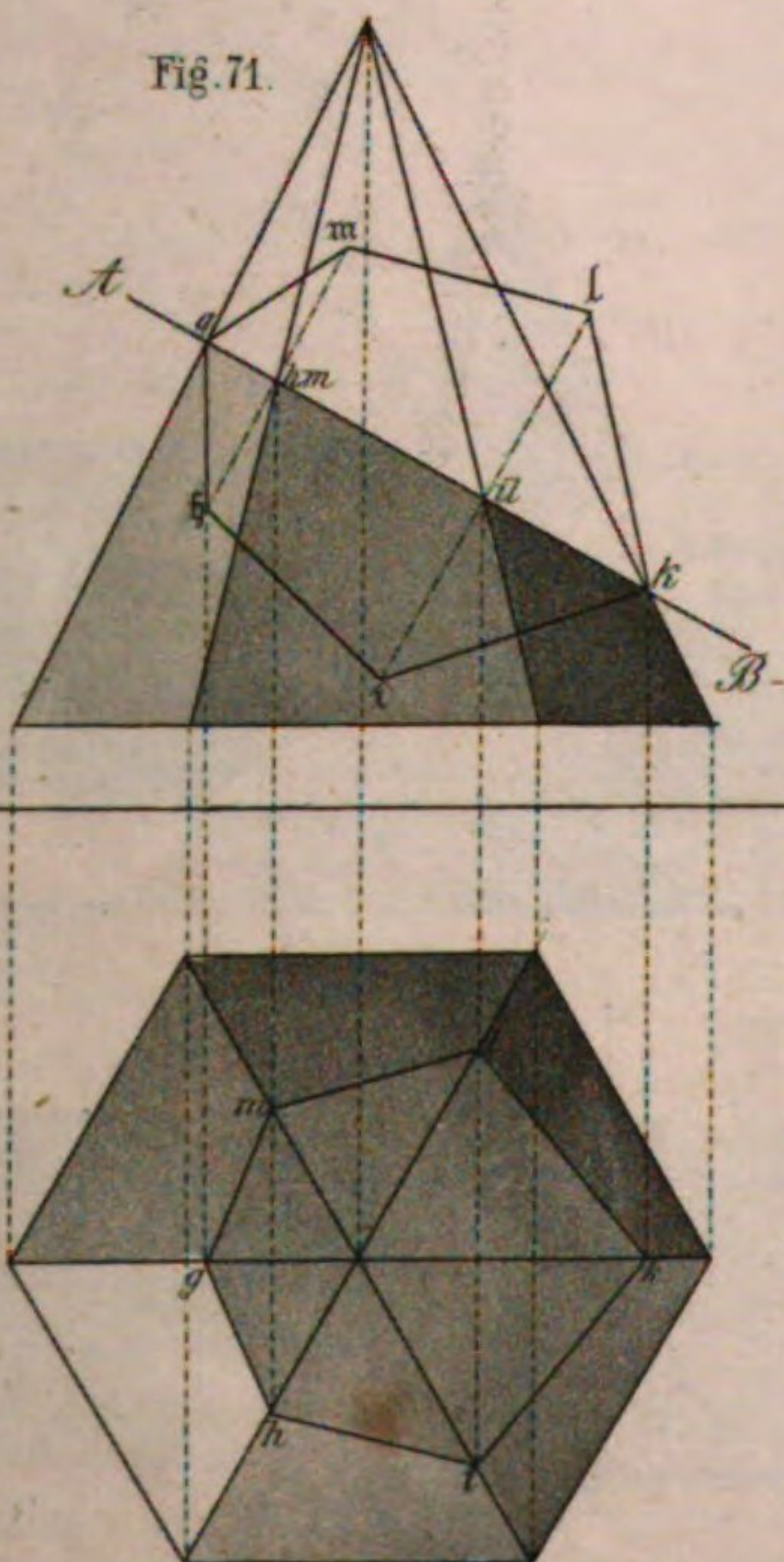


Fig. 72.

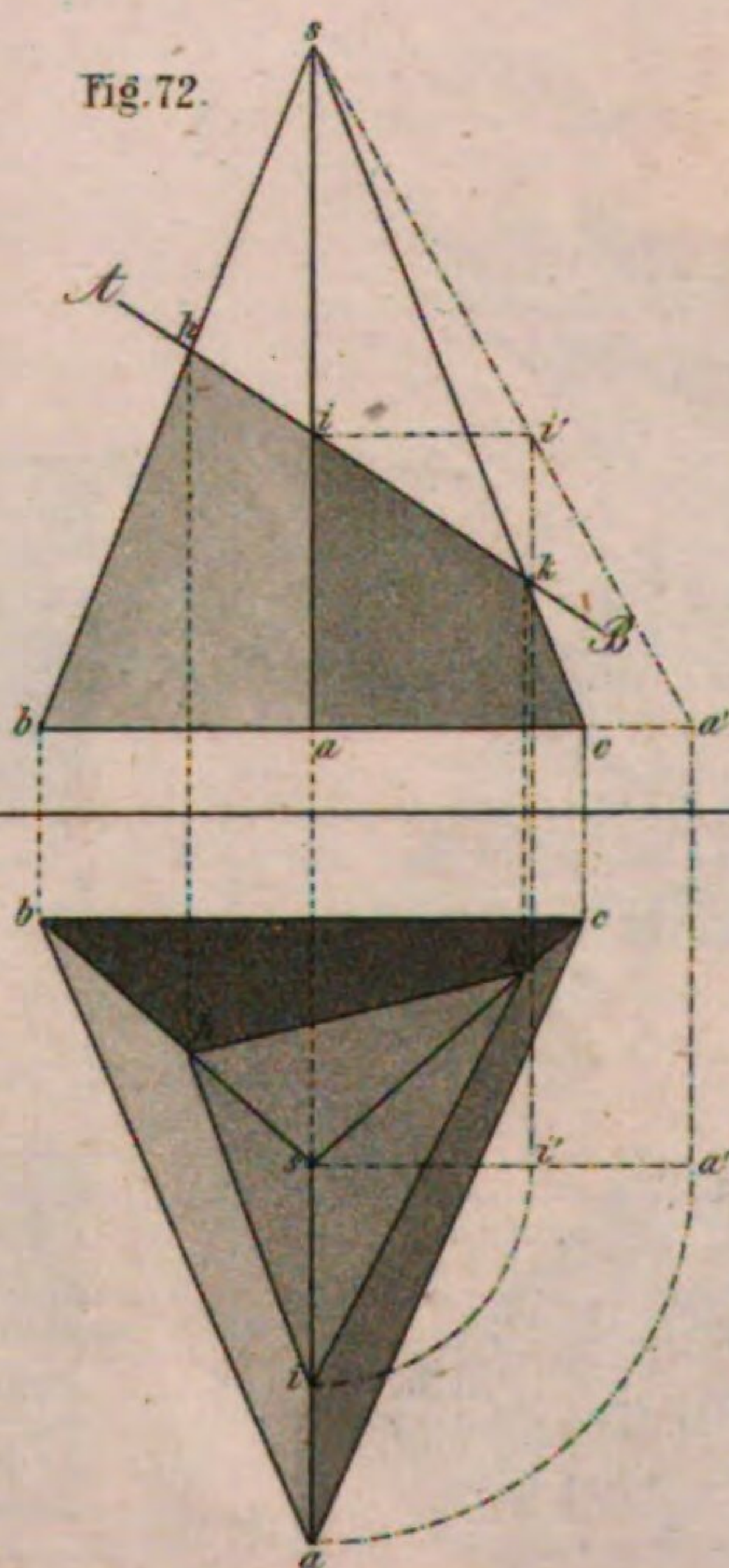


Fig. 73.

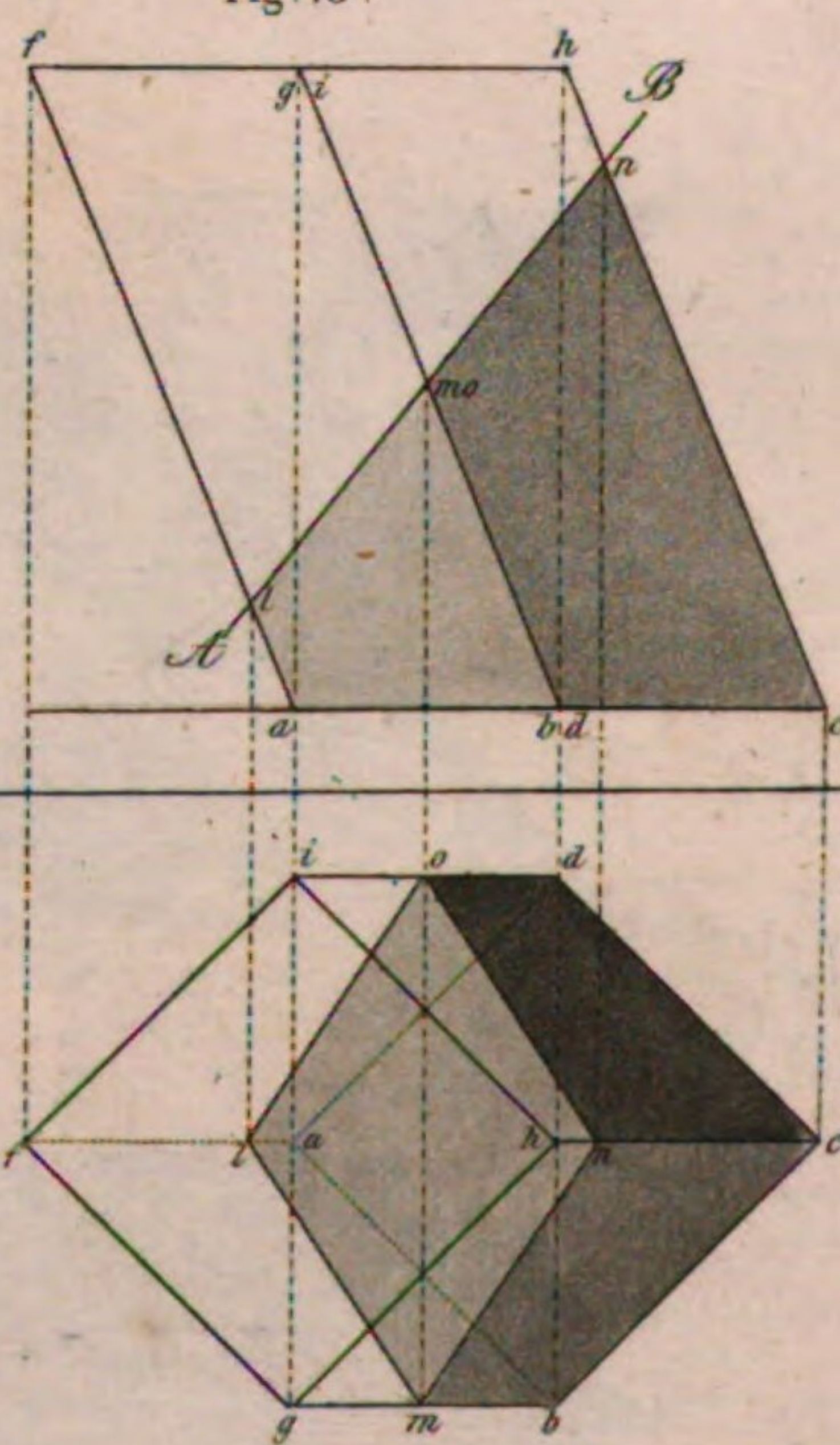


Fig. 74.

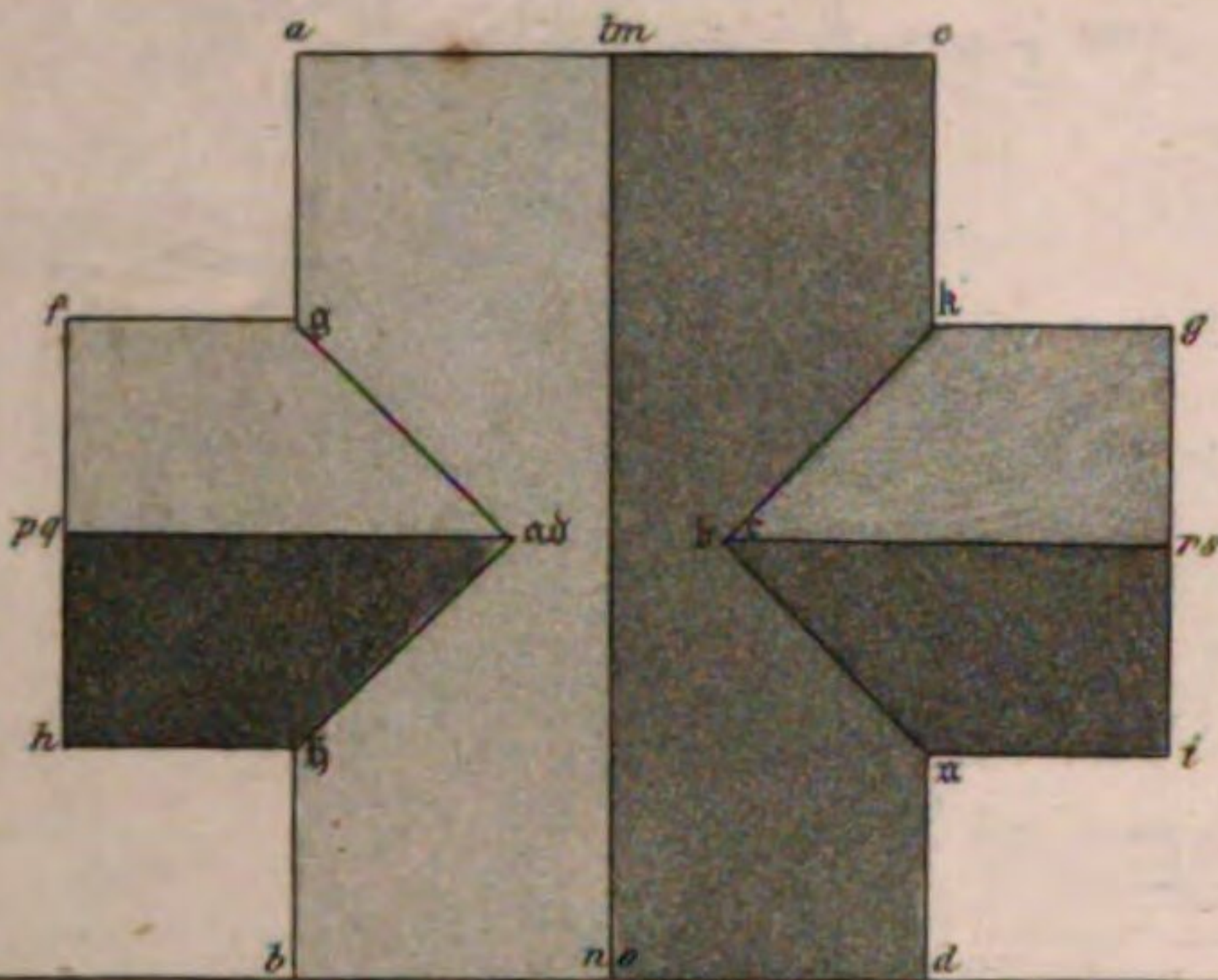


Fig. 75

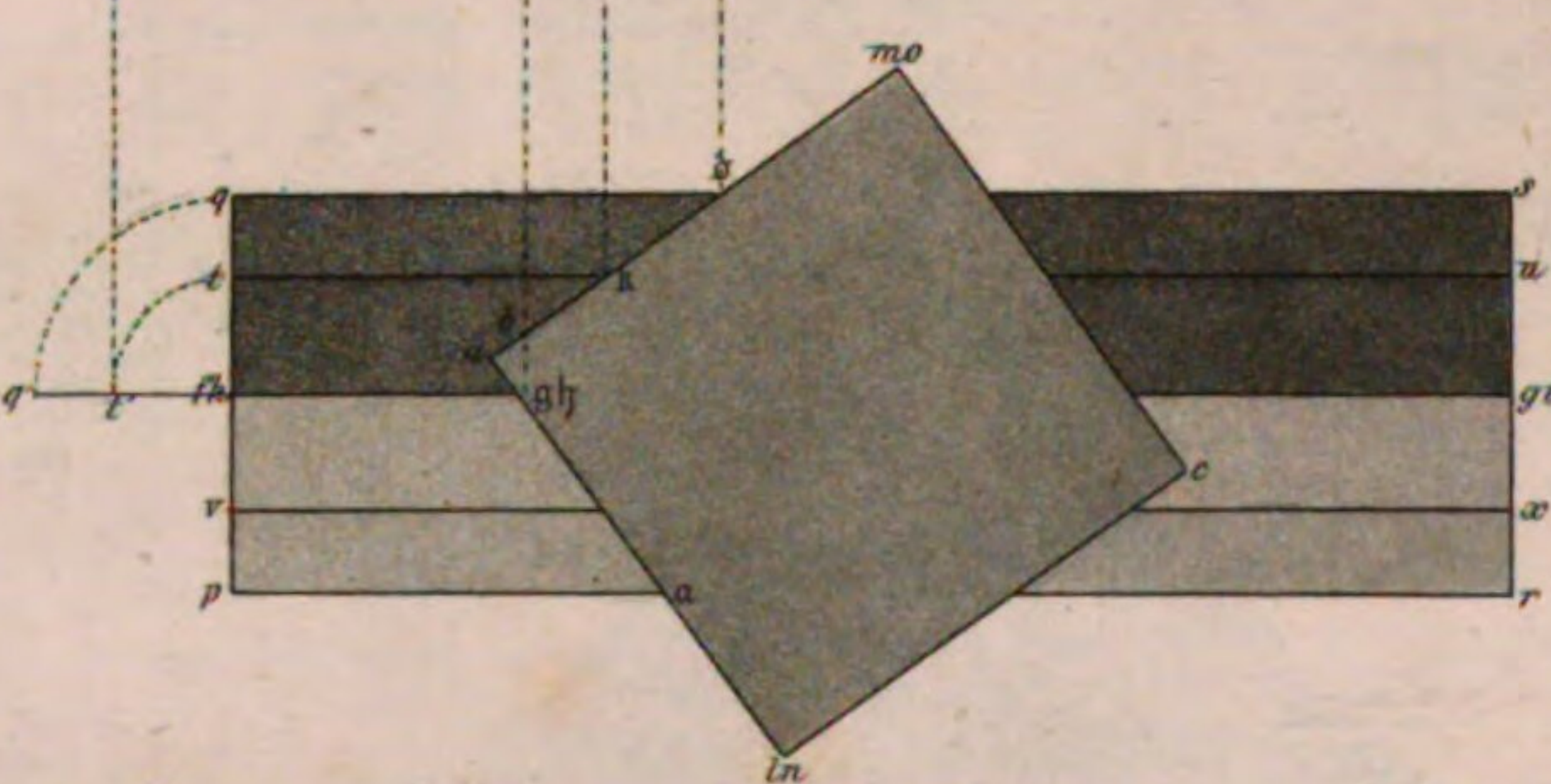
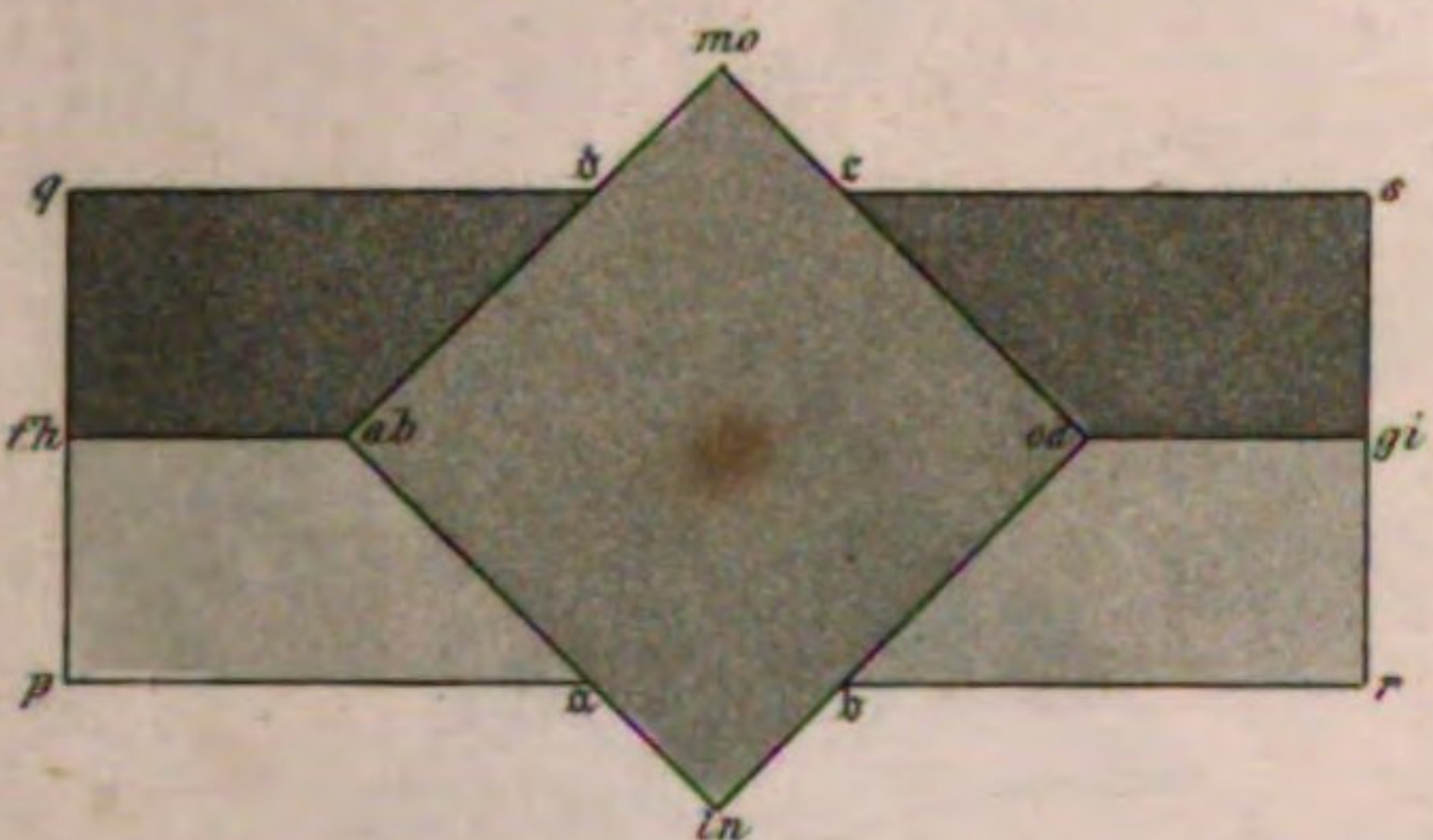
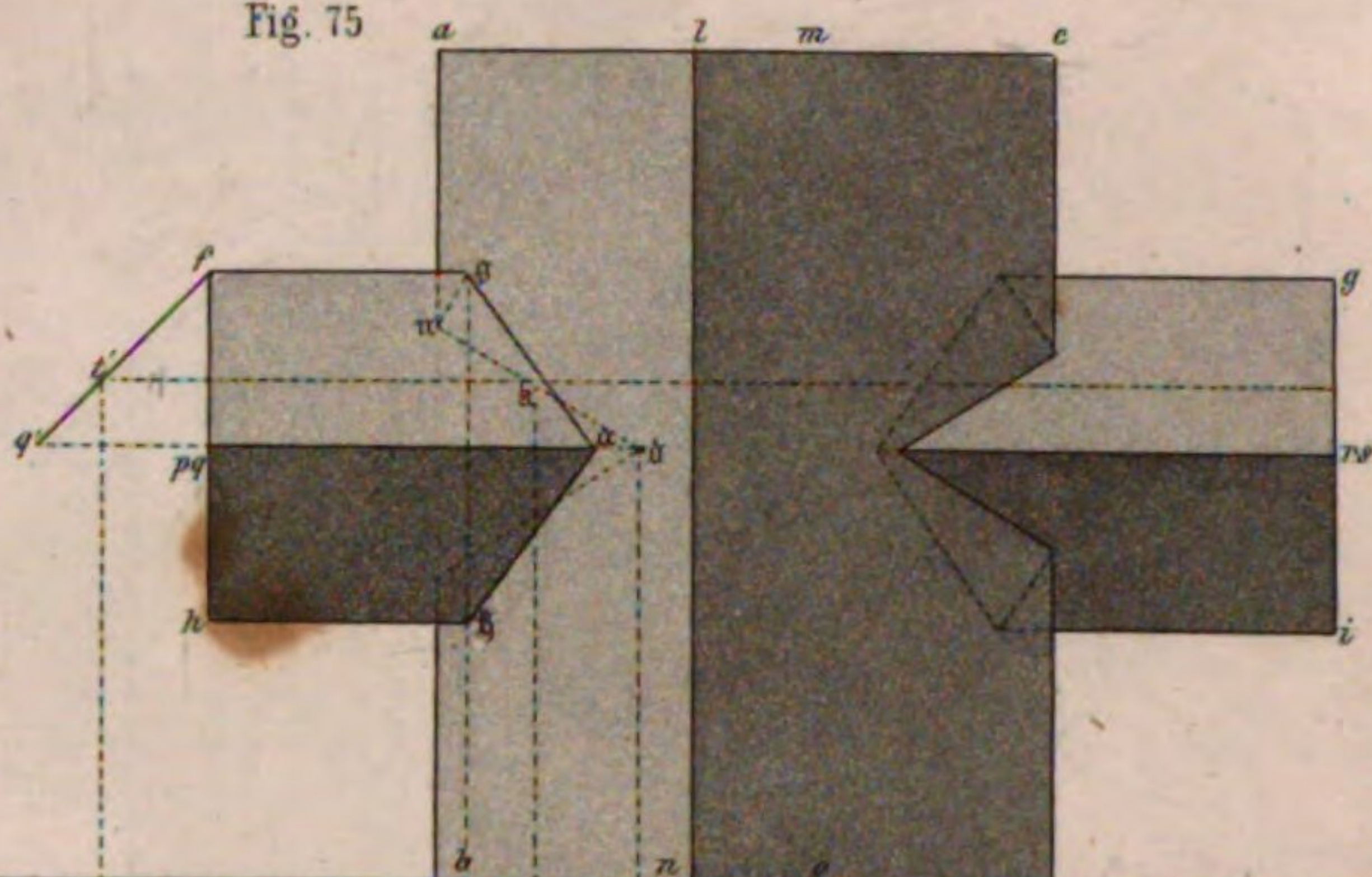


Fig. 76.

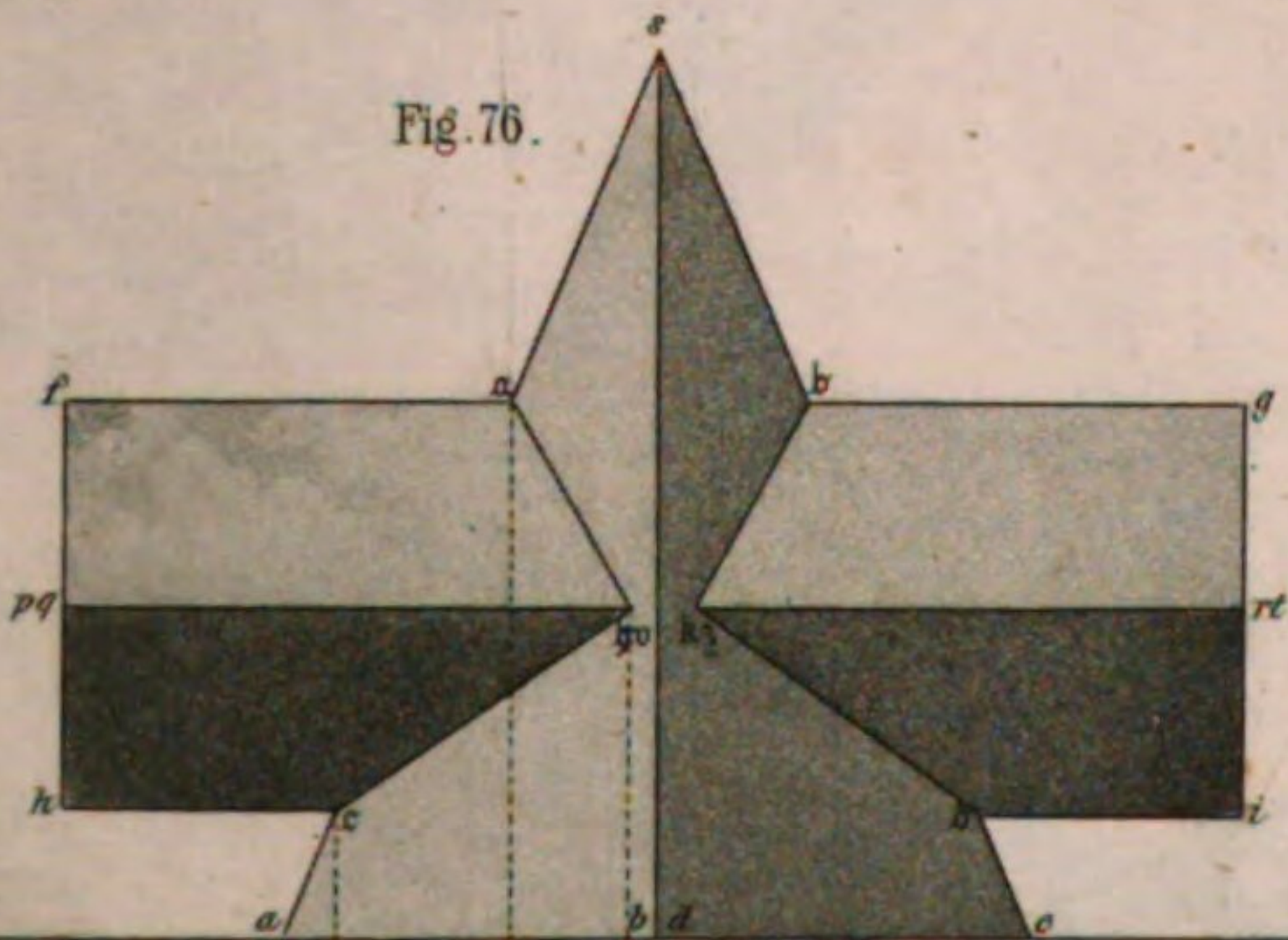


Fig. 77.

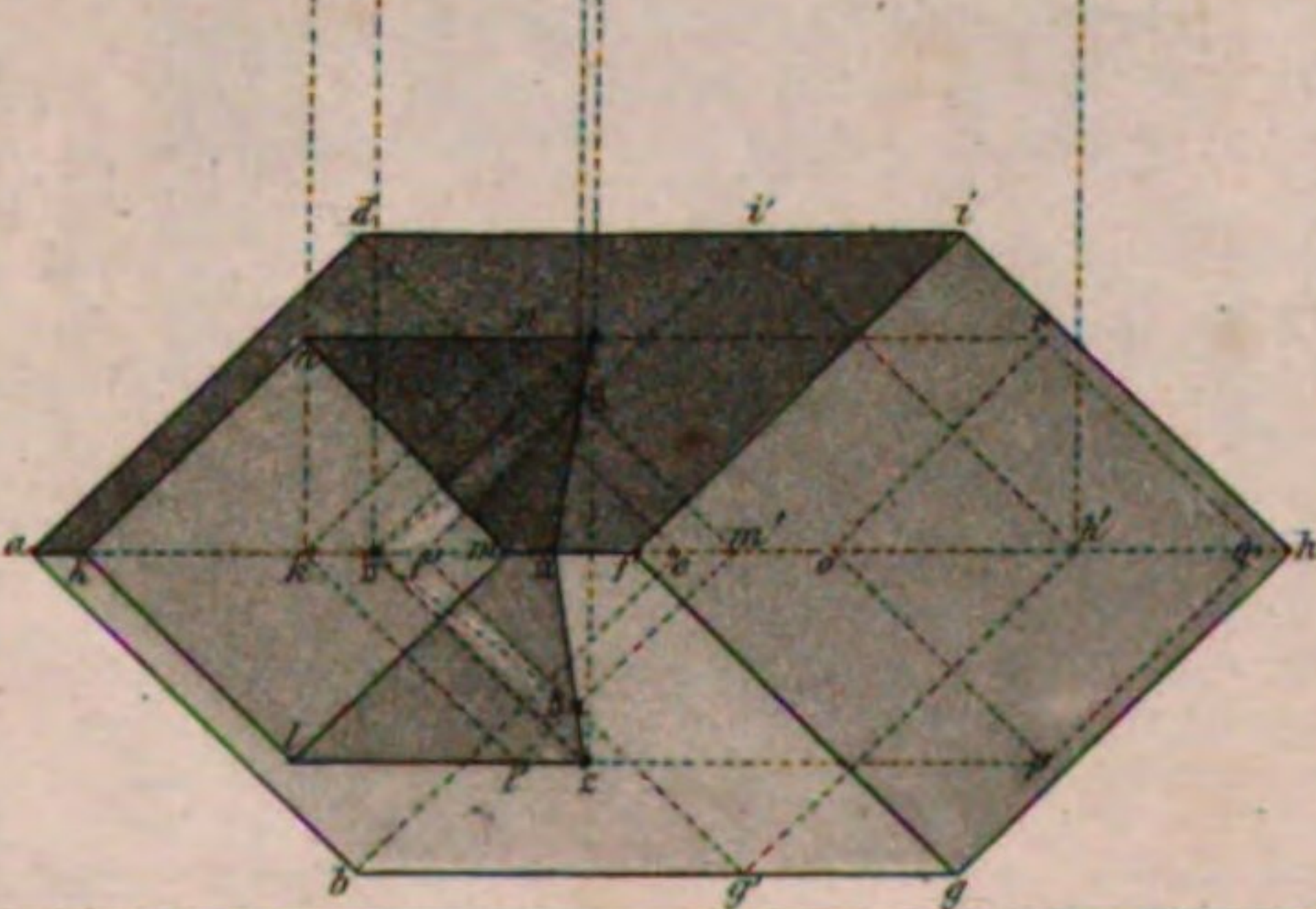
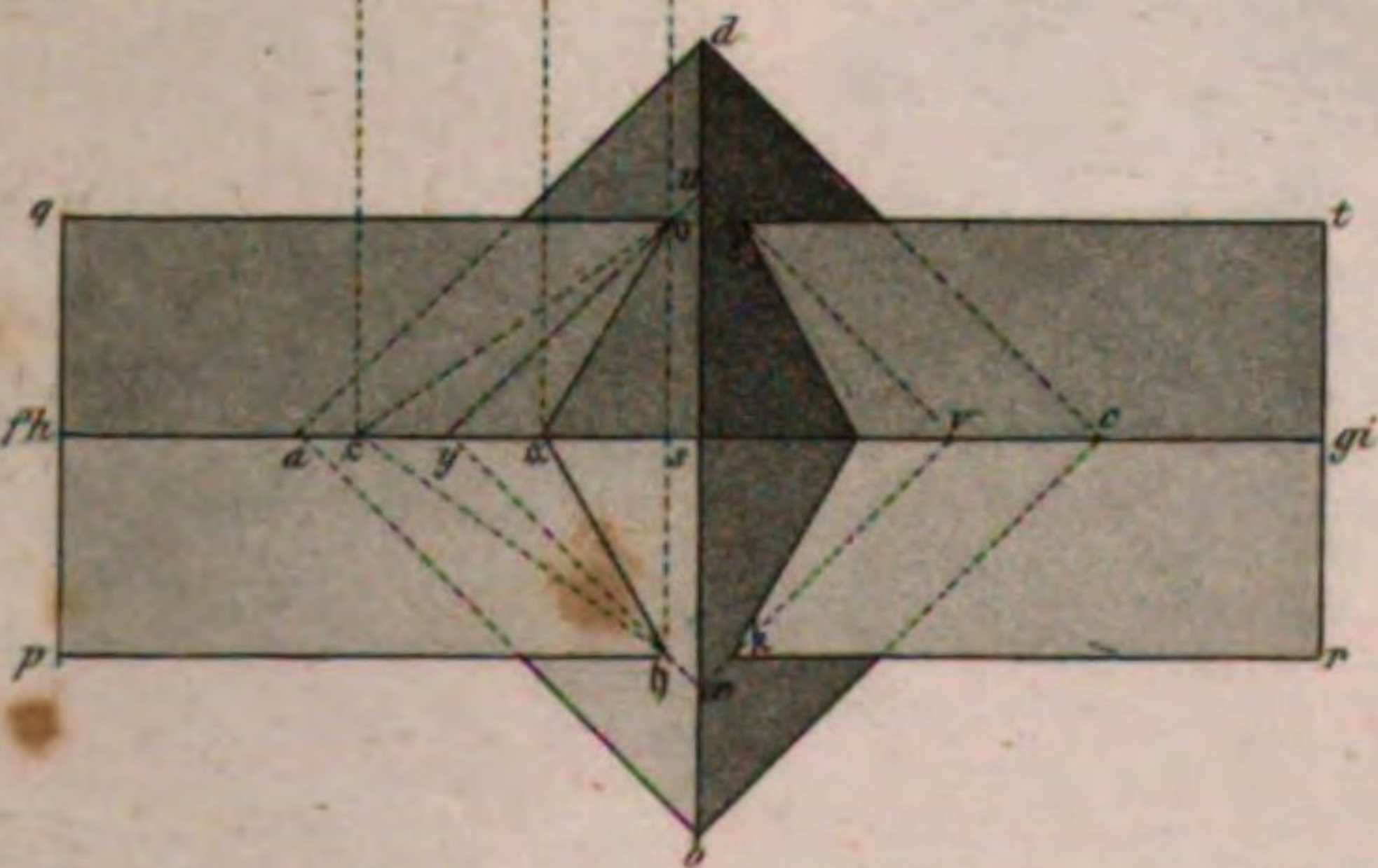
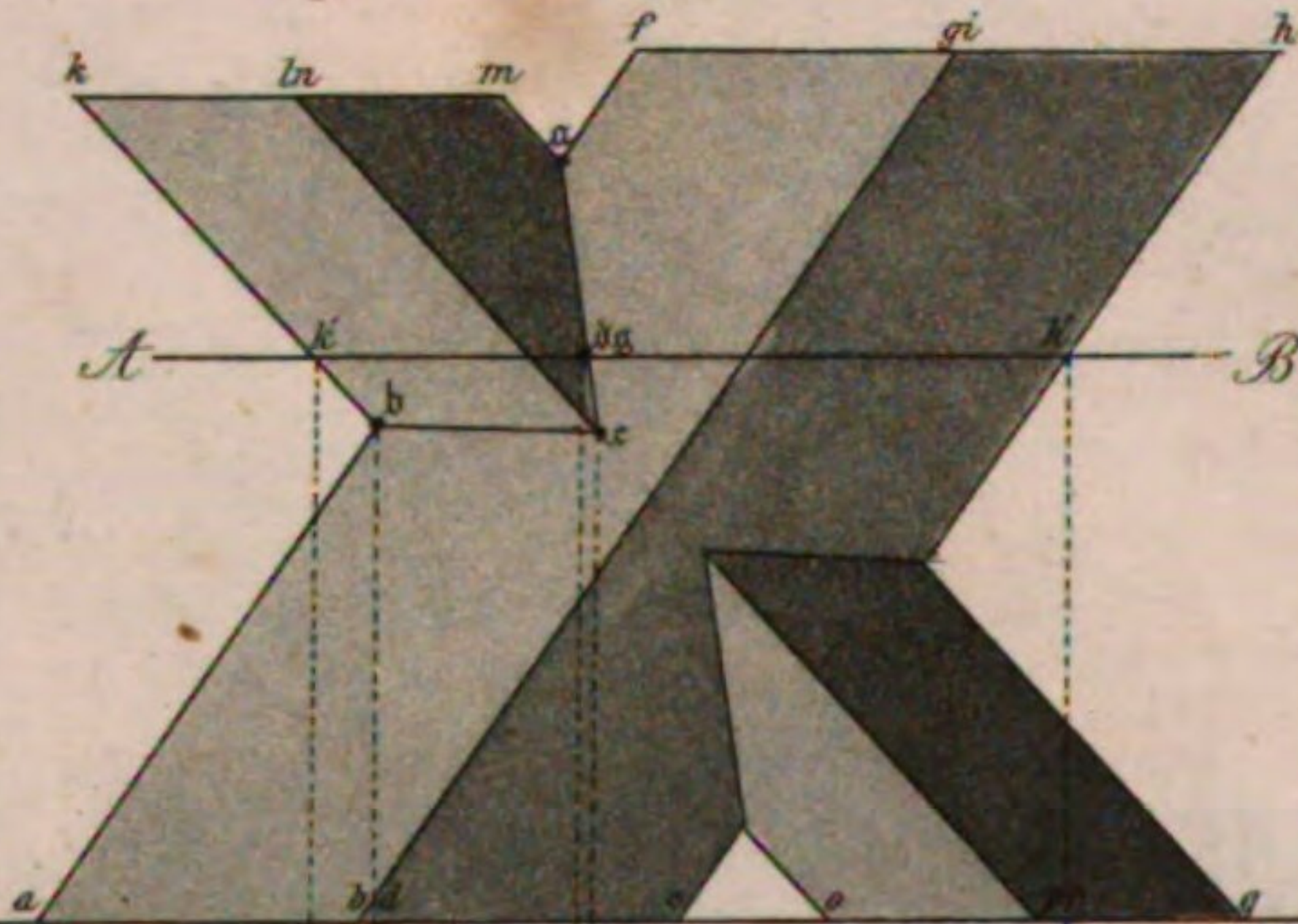


Fig. 78.

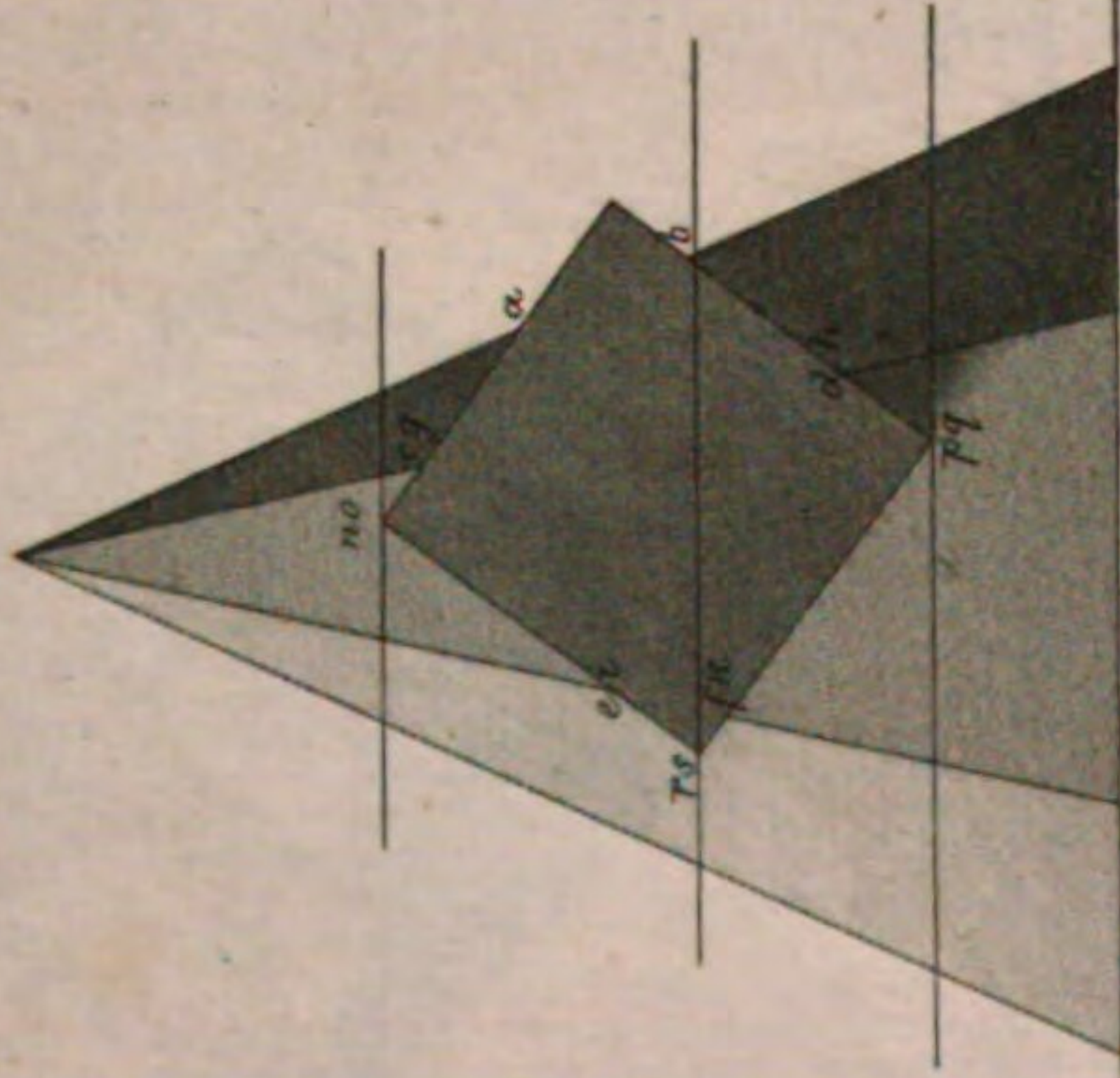


Fig. 79.

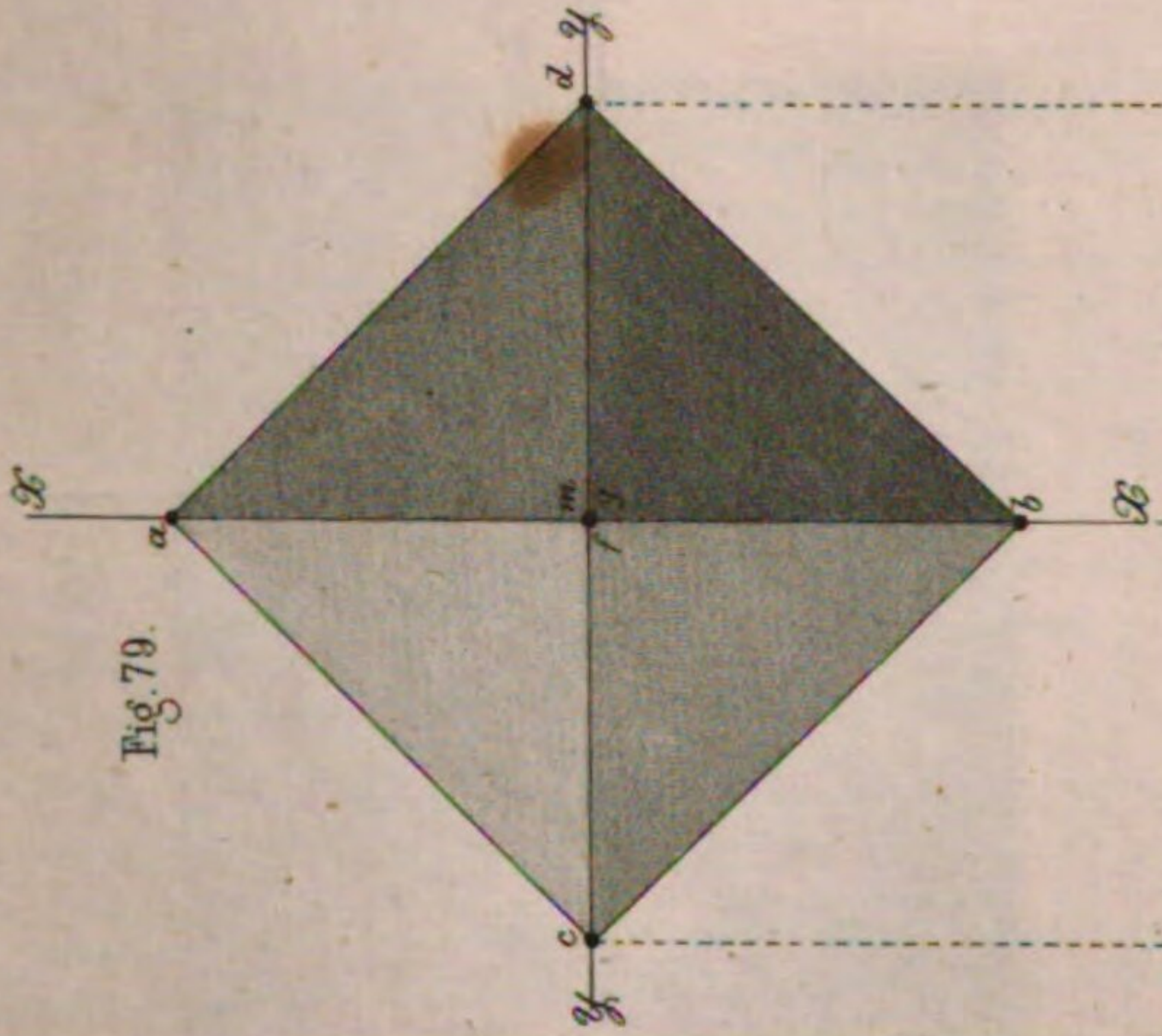
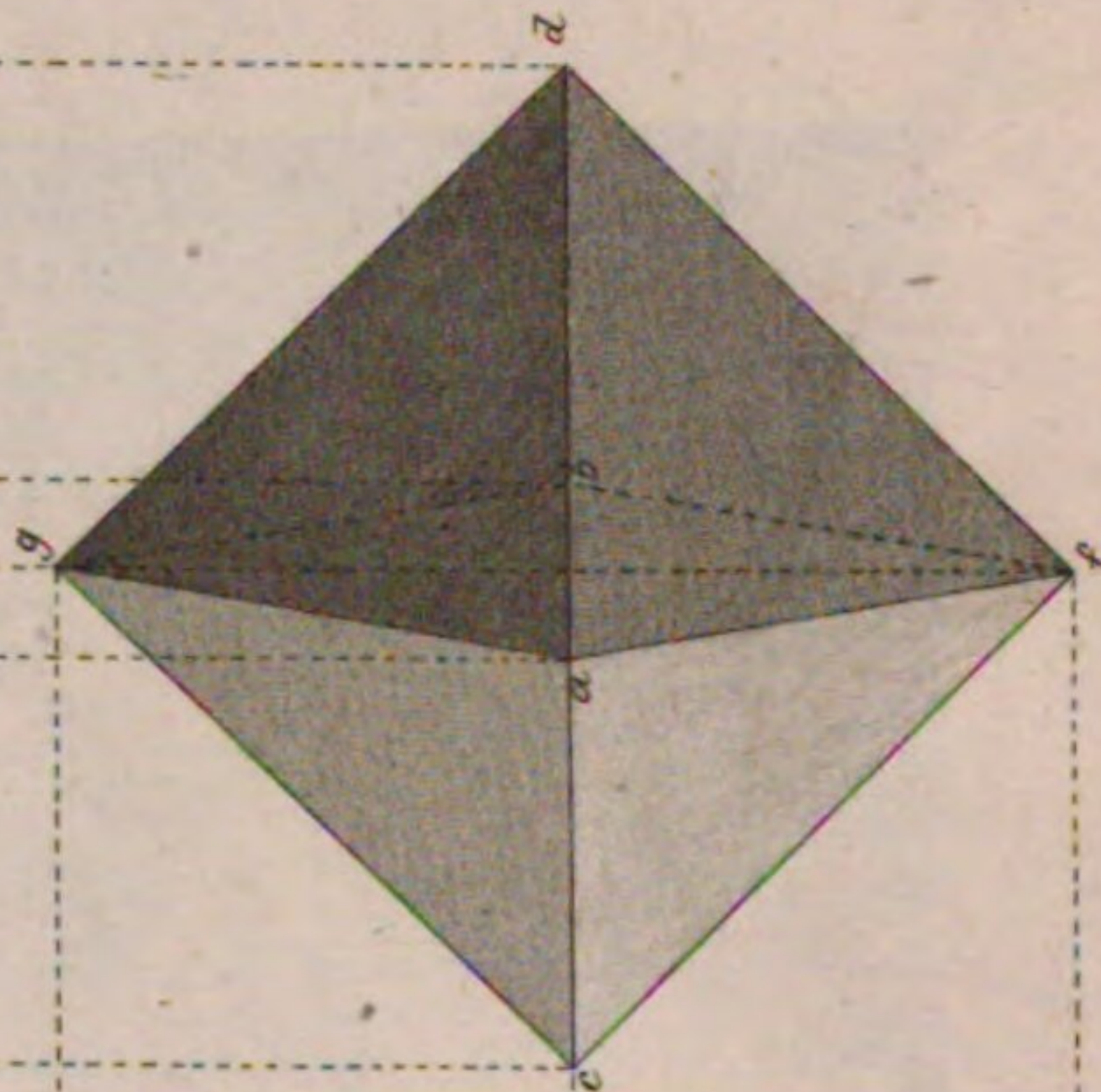
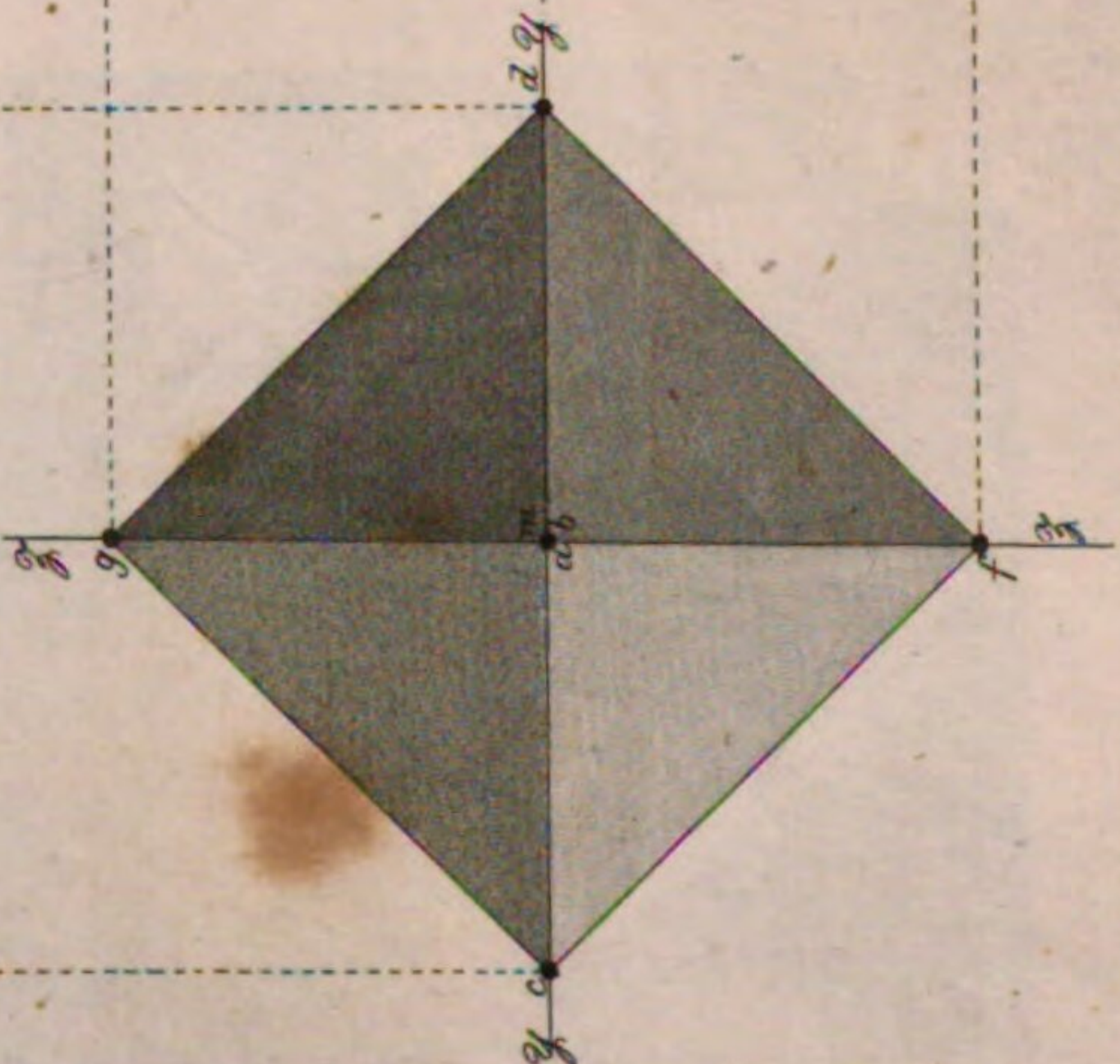
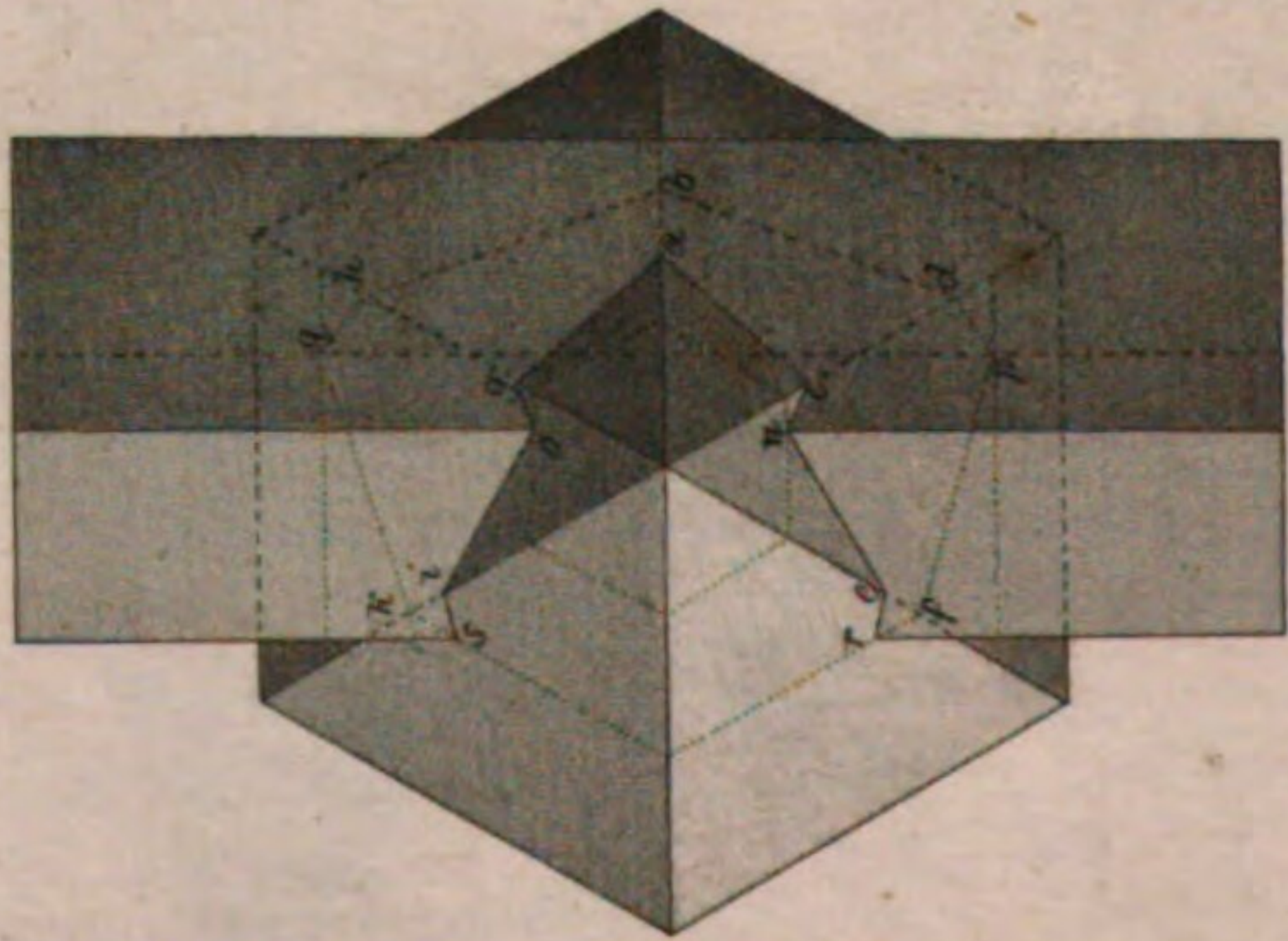
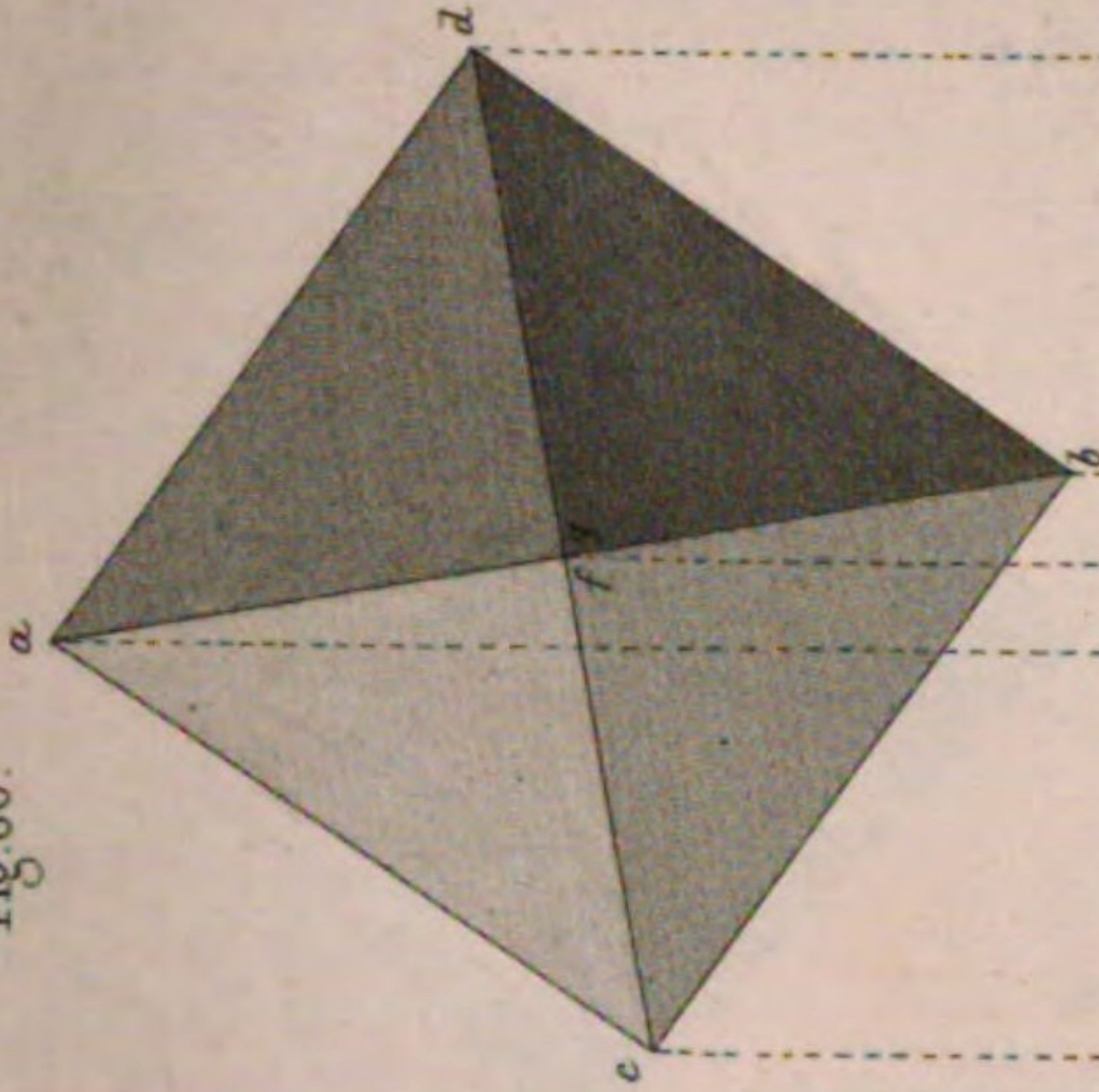


Fig. 80.



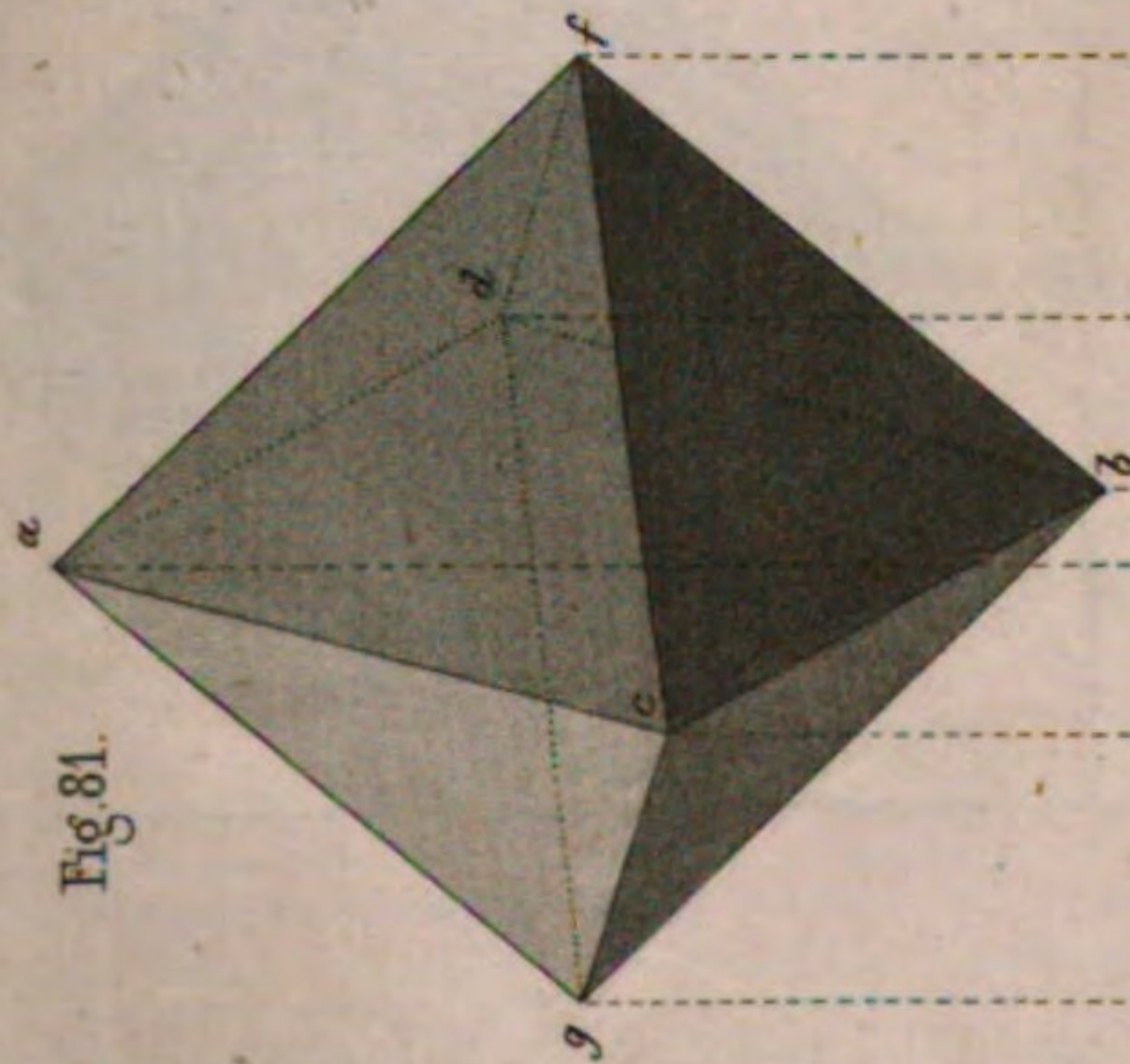


Fig 81.

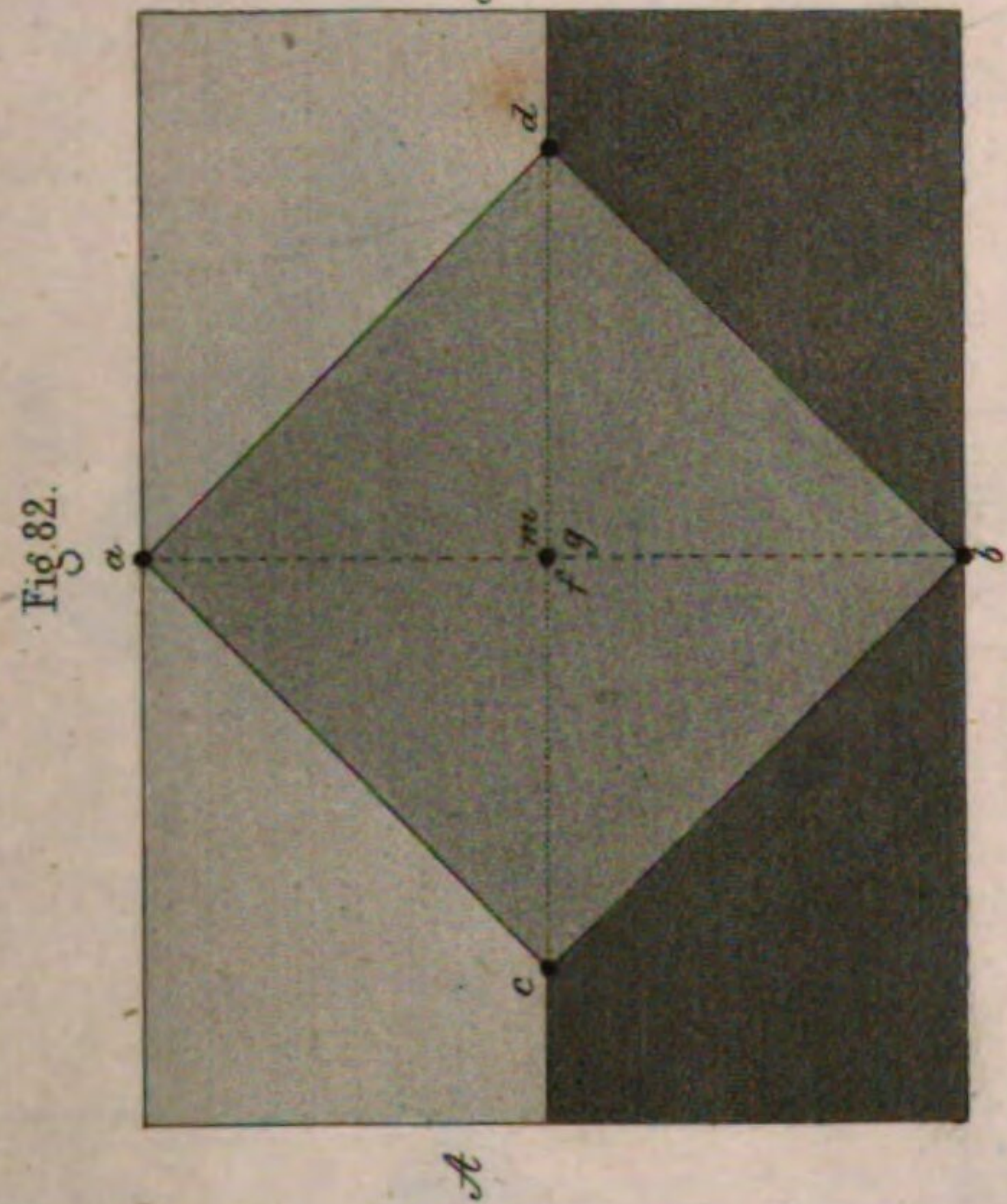


Fig 82.

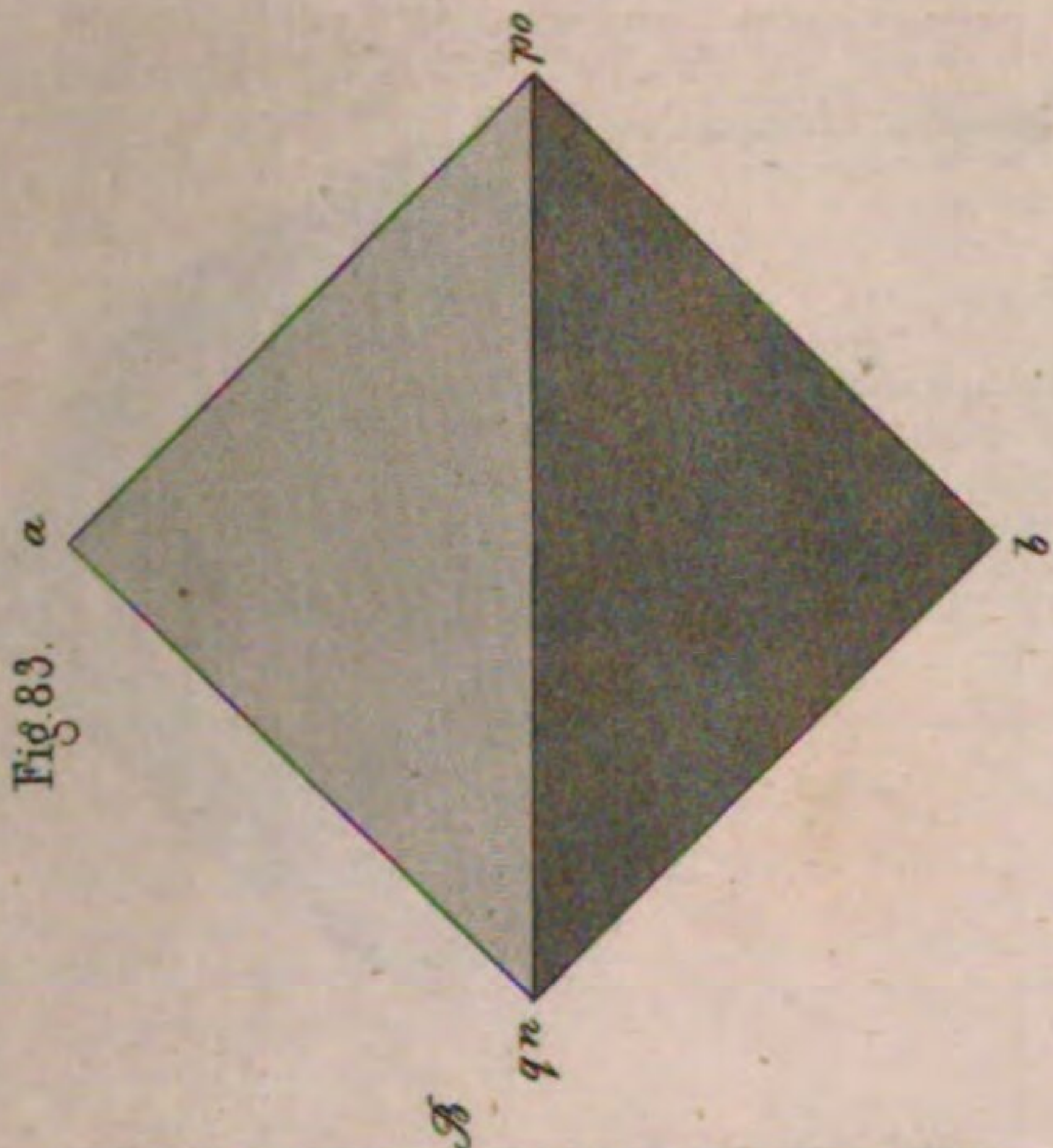
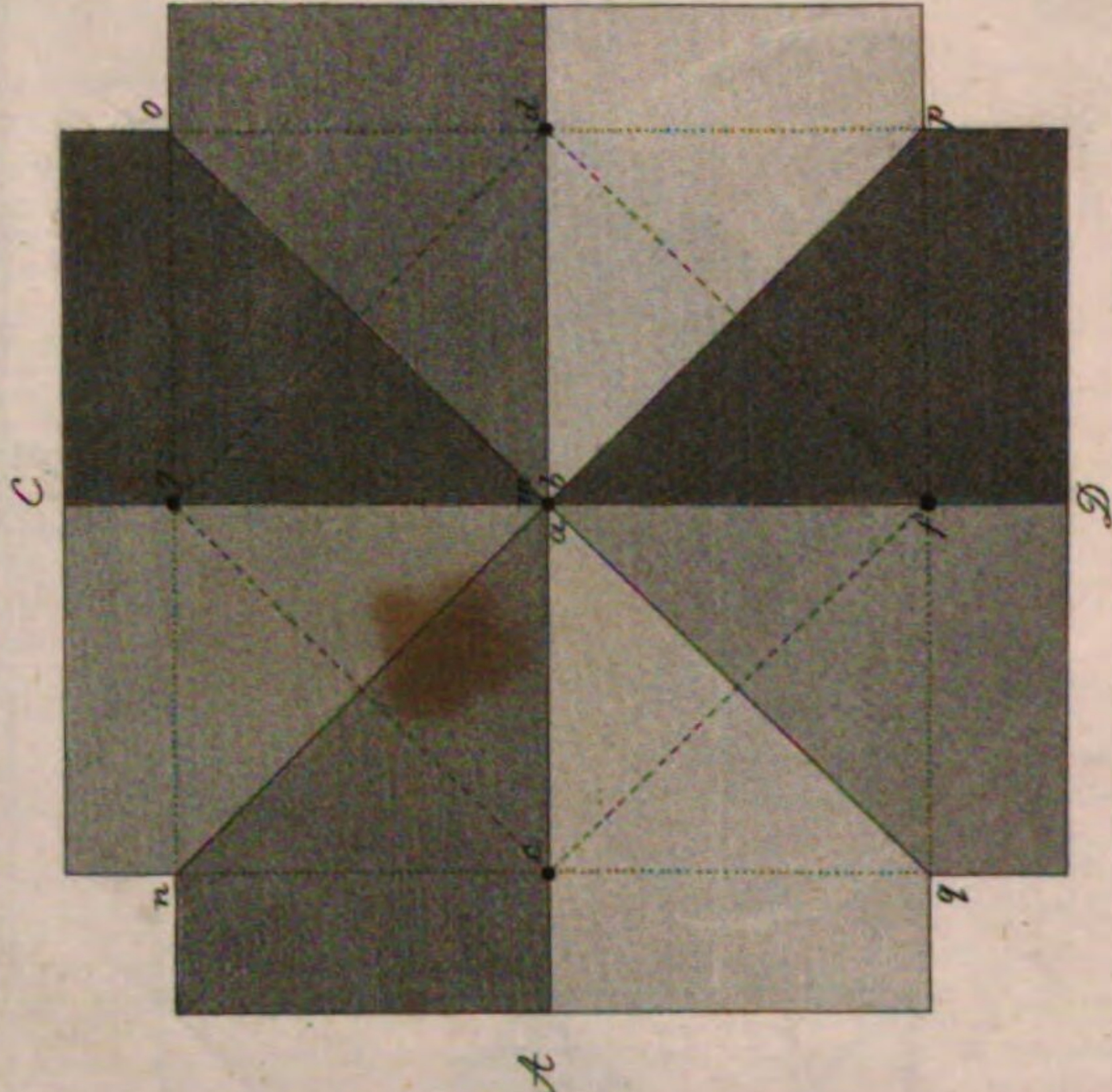
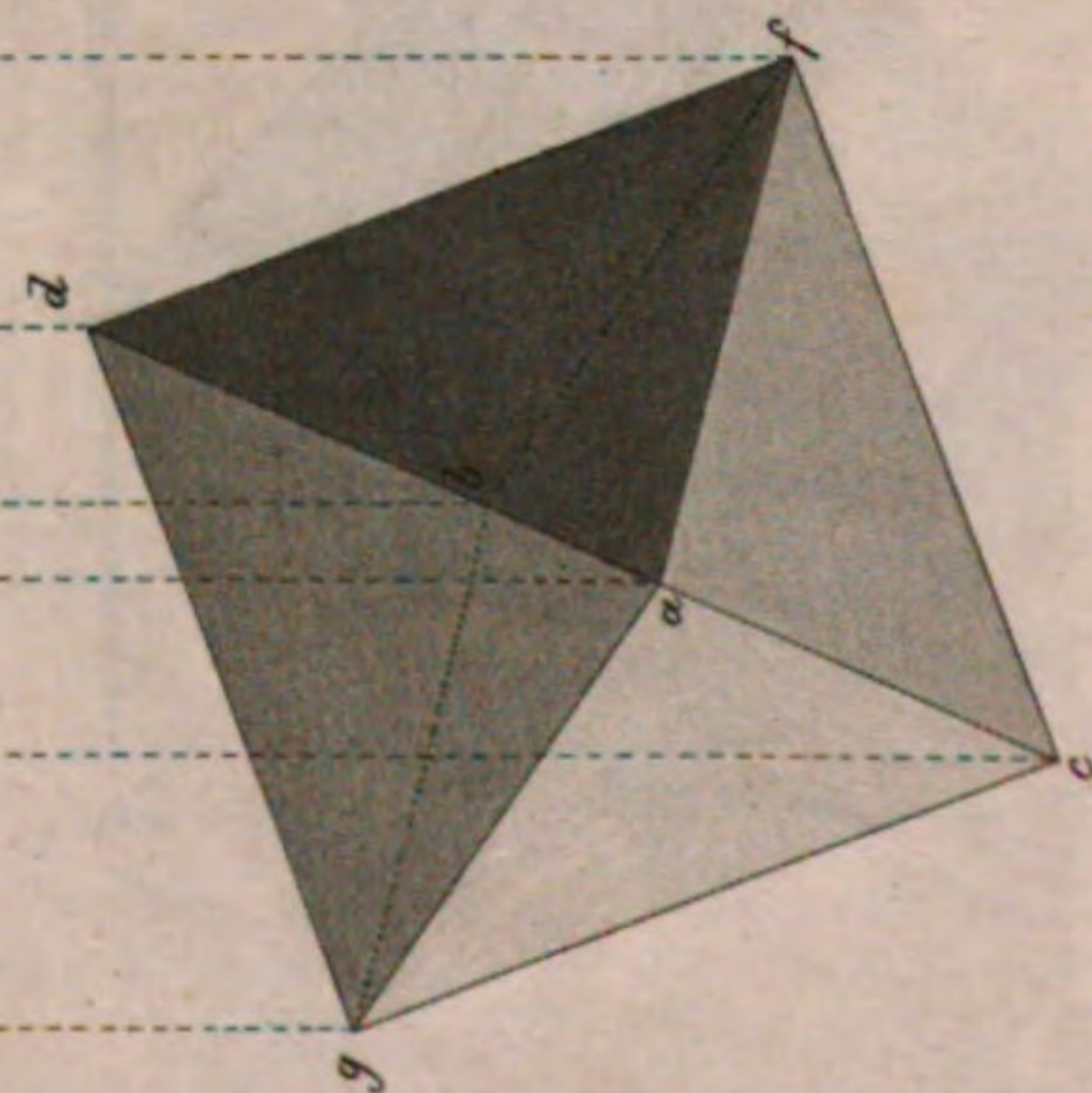
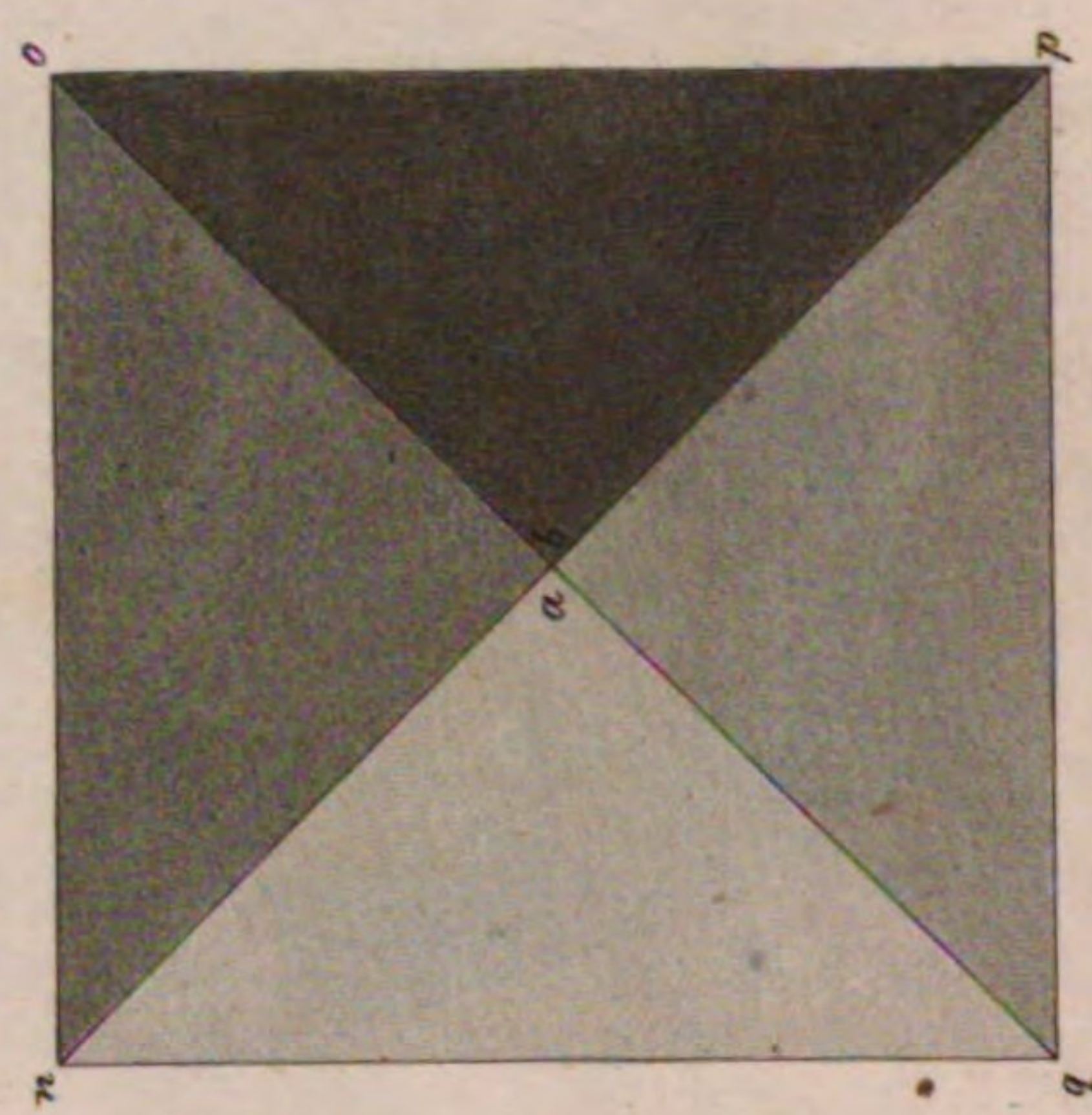
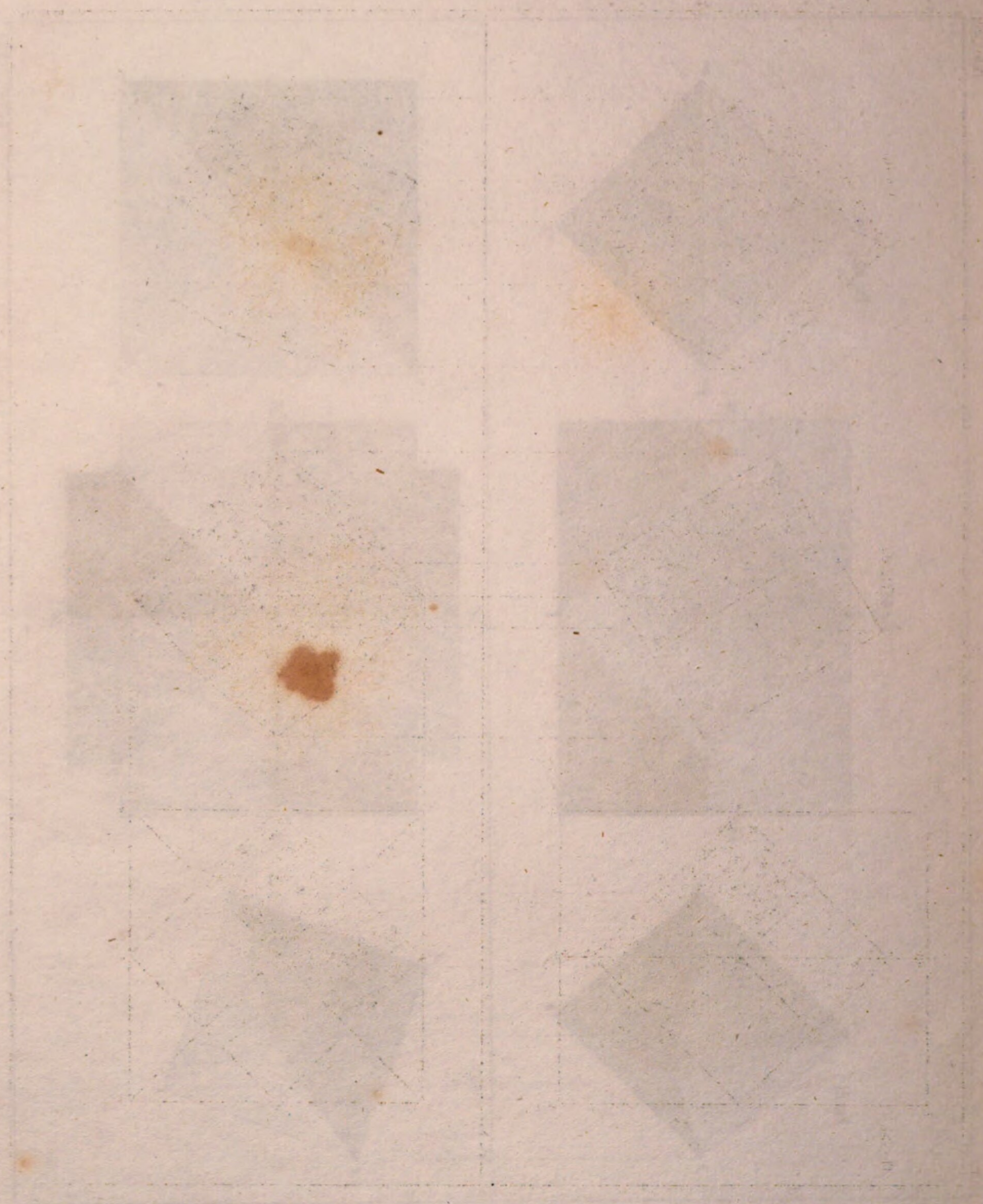


Fig 83.



C





I.

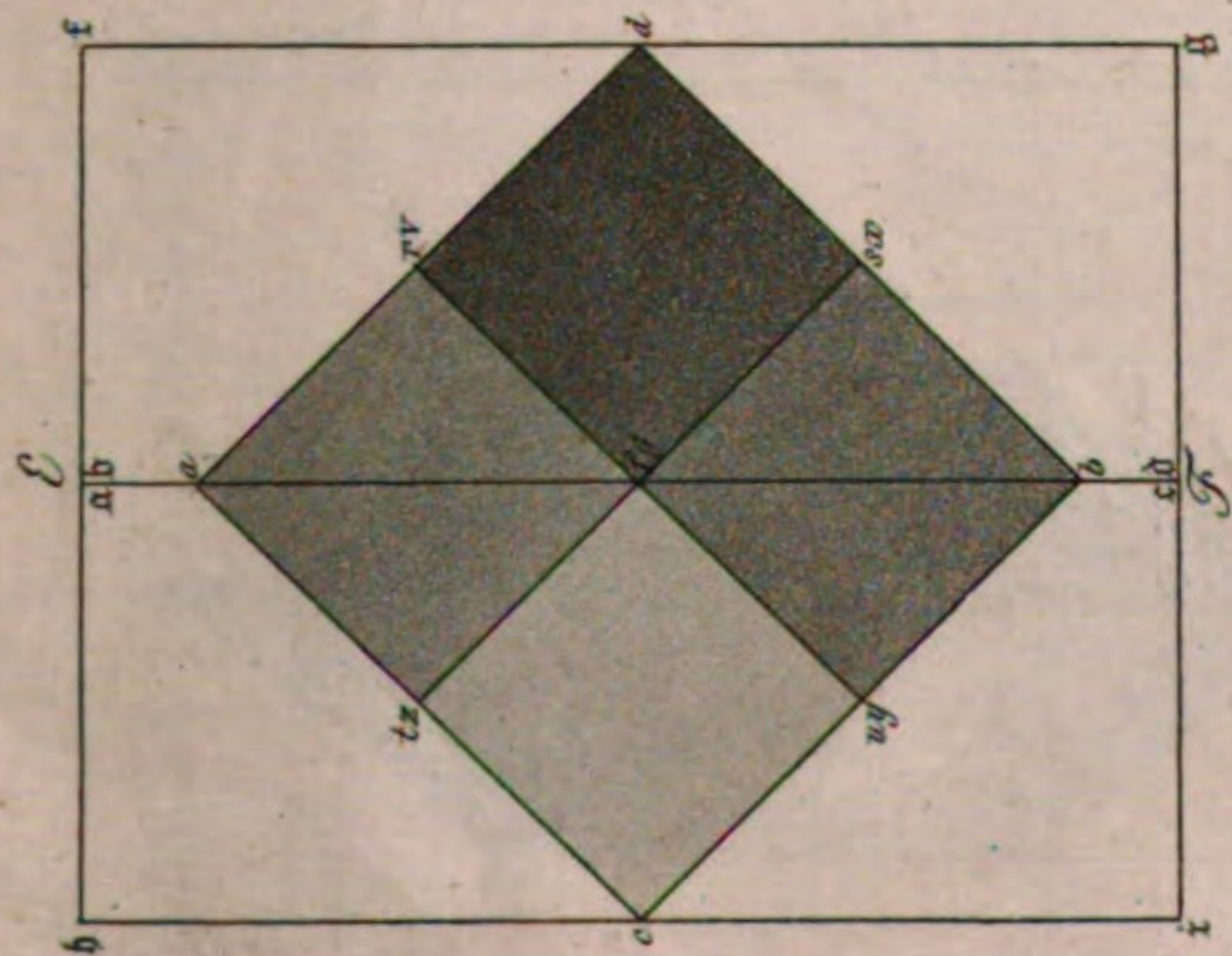


Fig 84.

Fig 85.

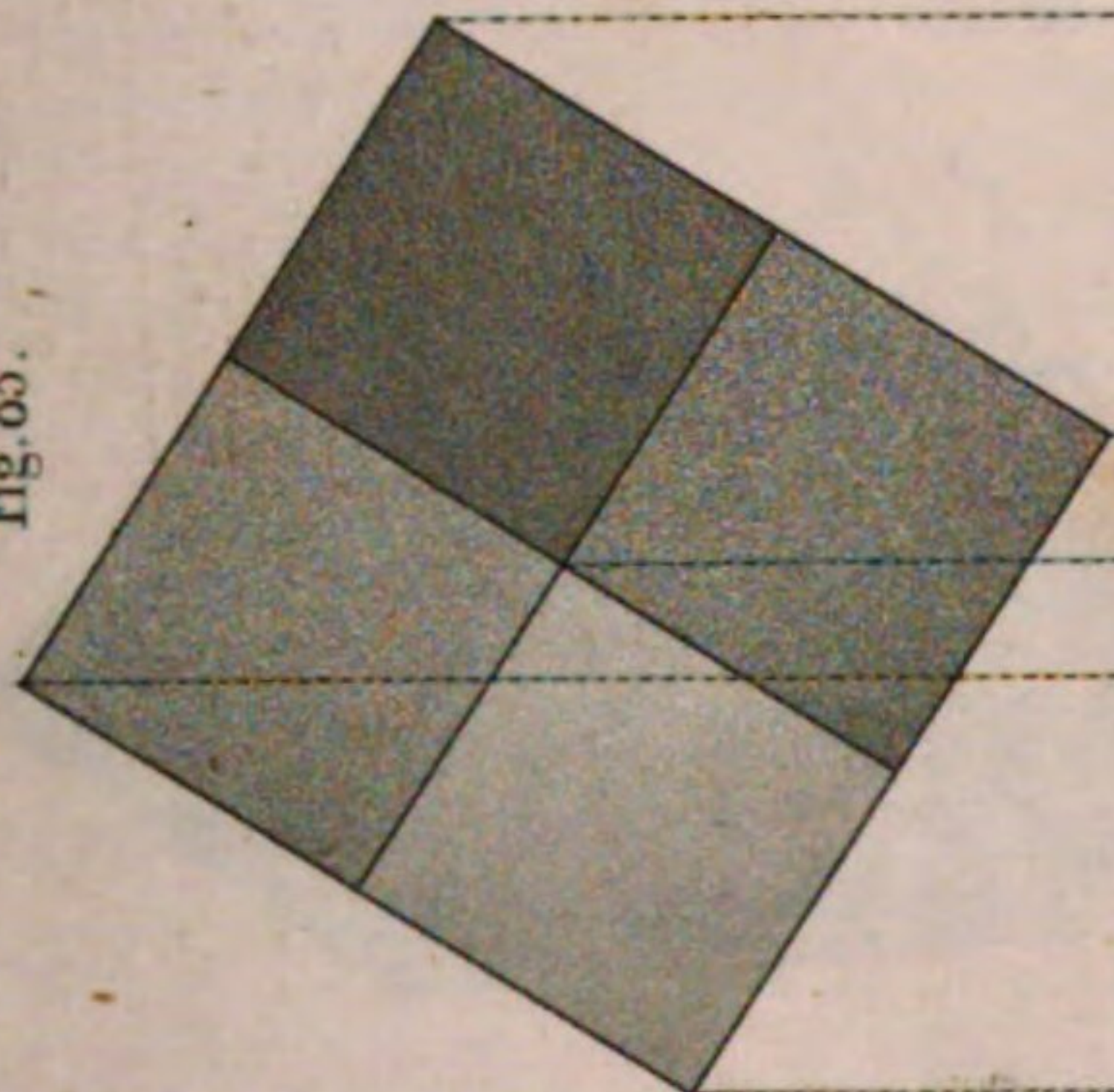
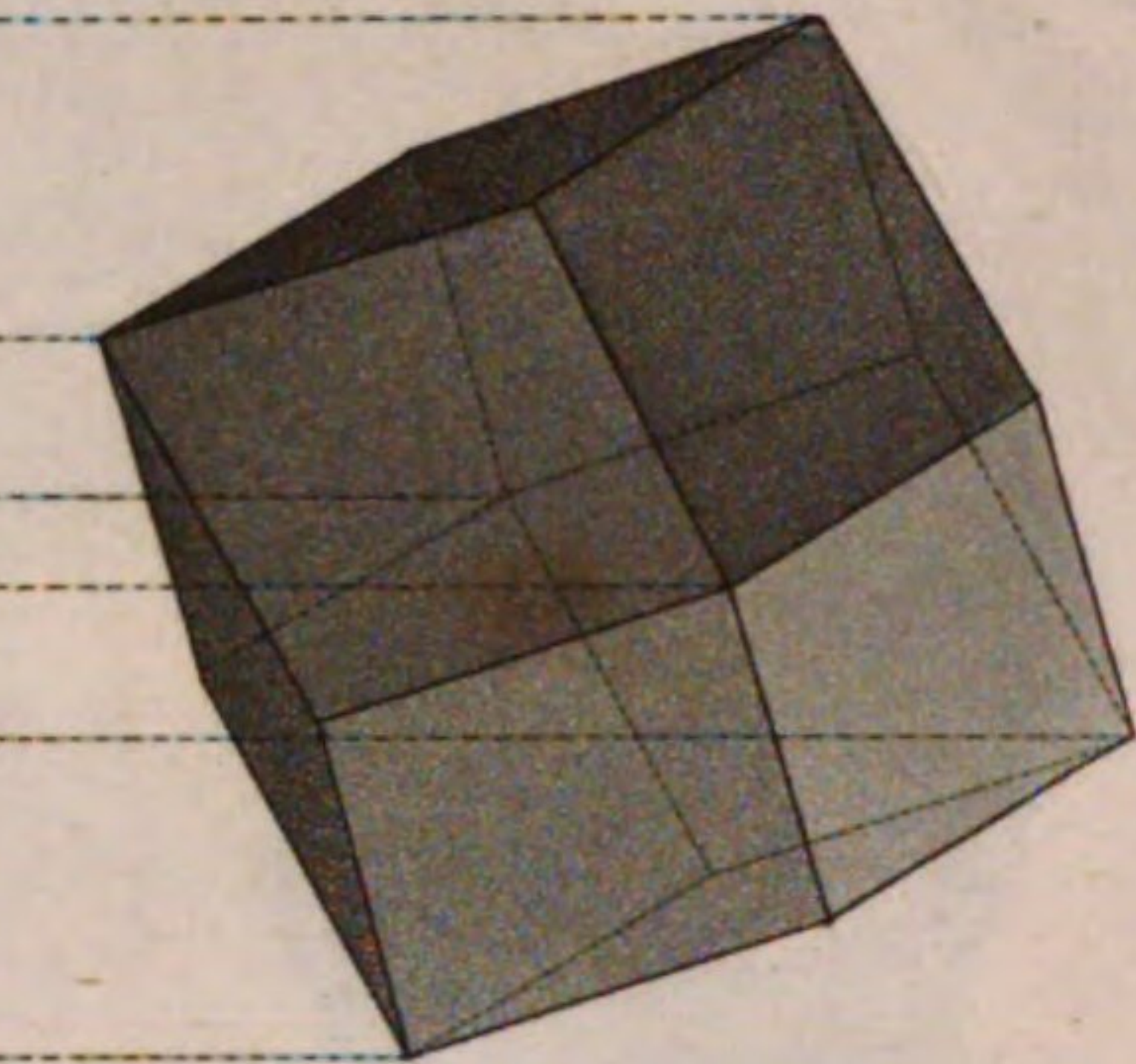
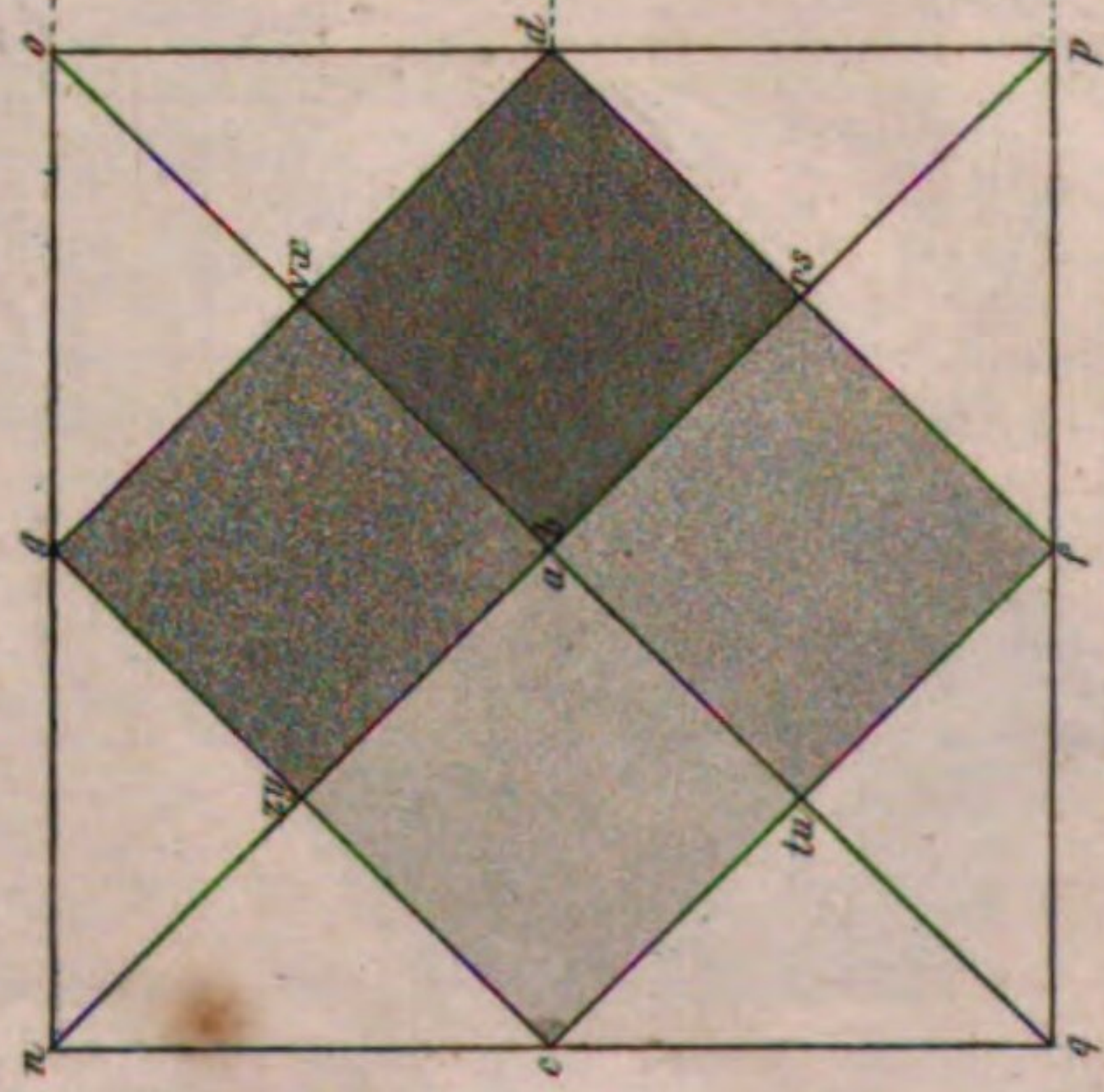
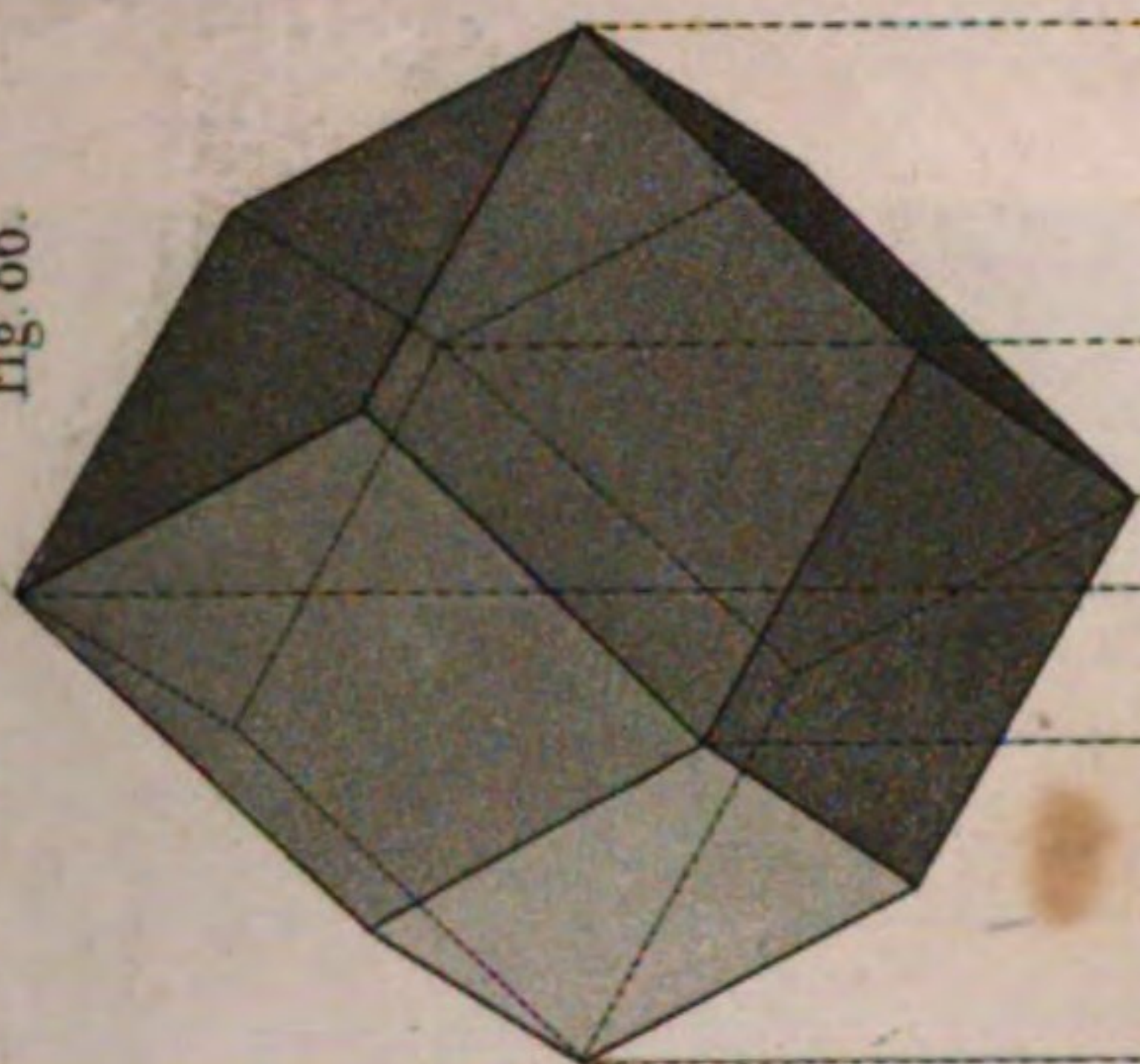


Fig 86.



I.

Fig. 87.

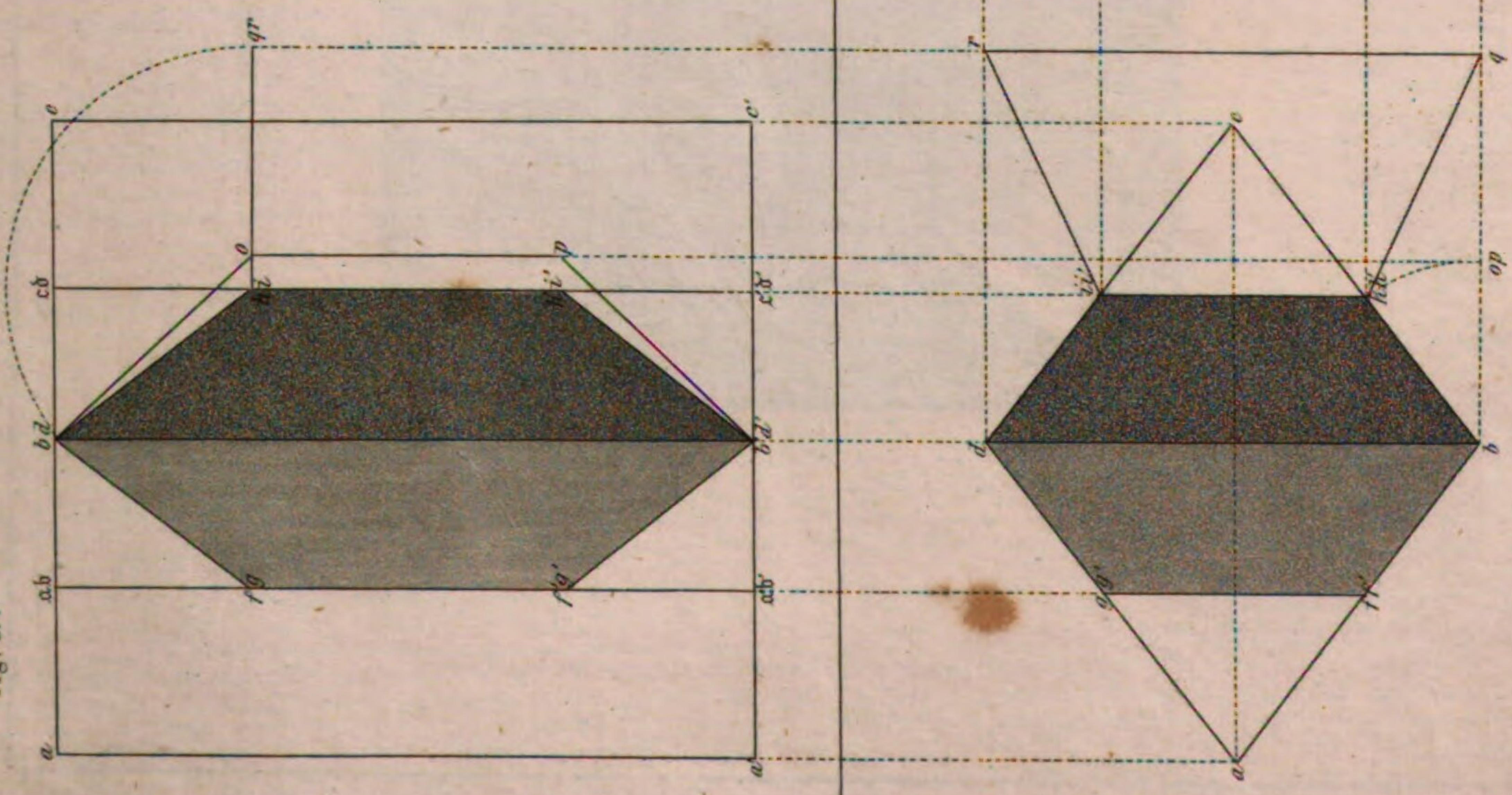
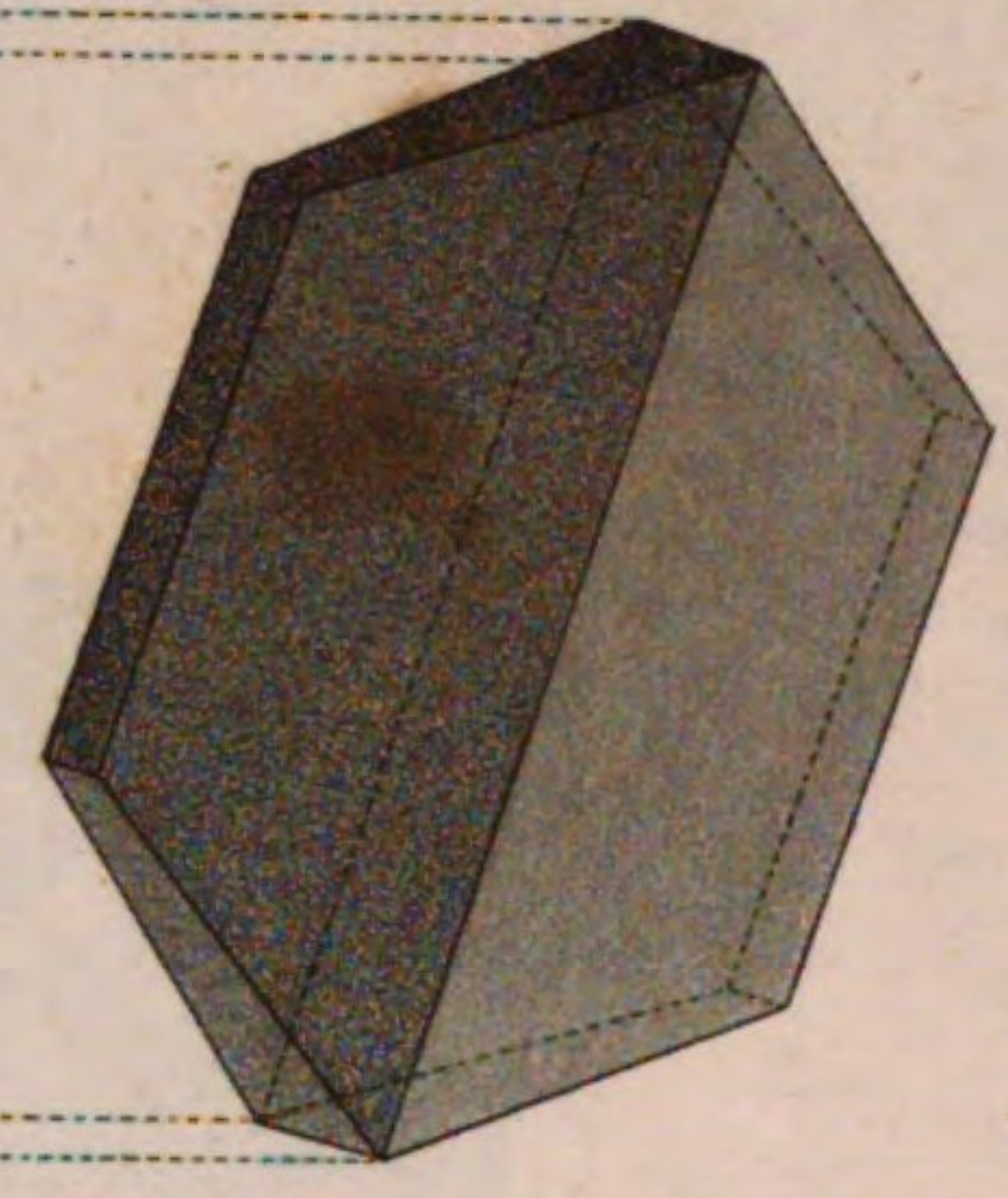
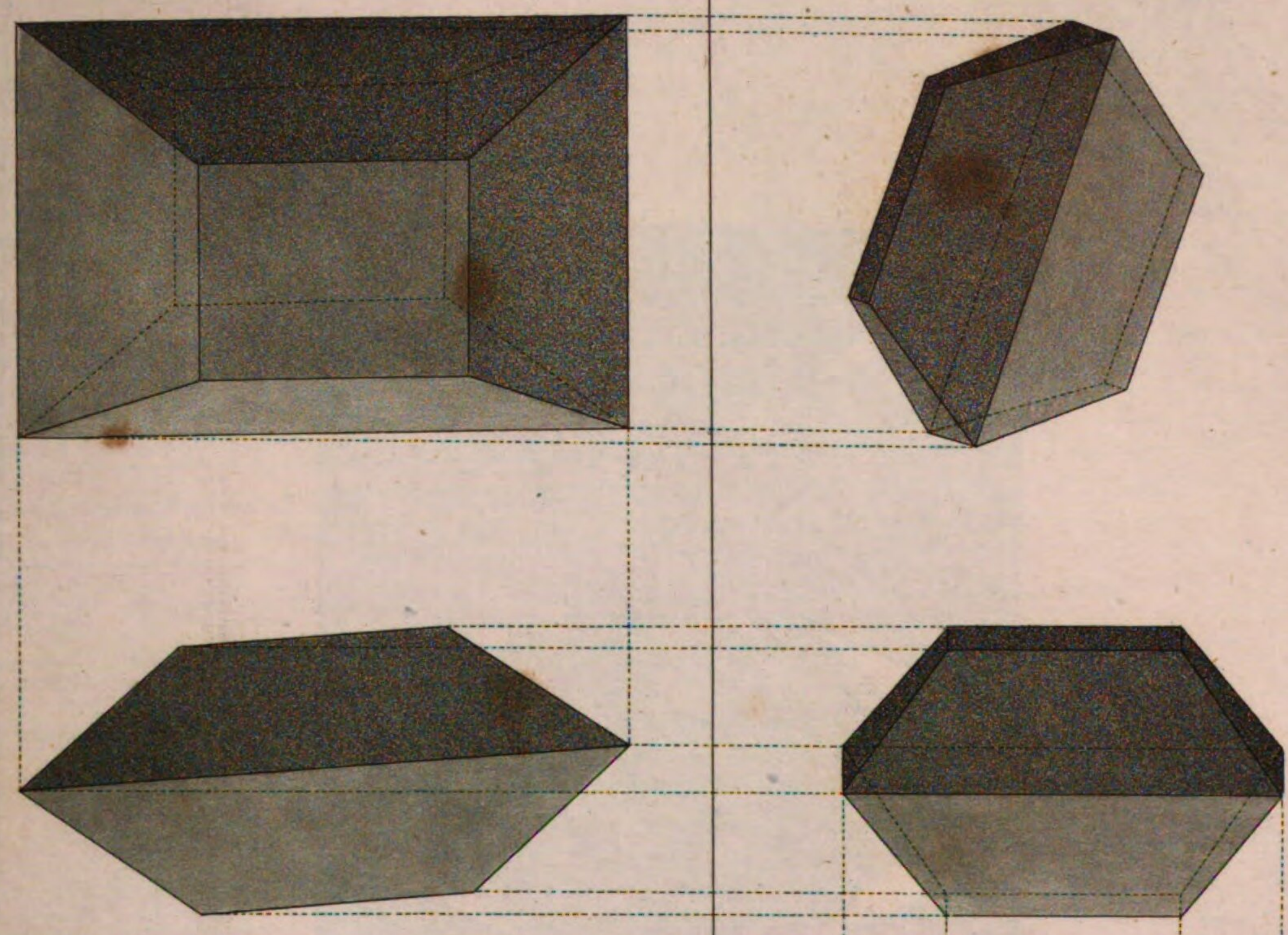
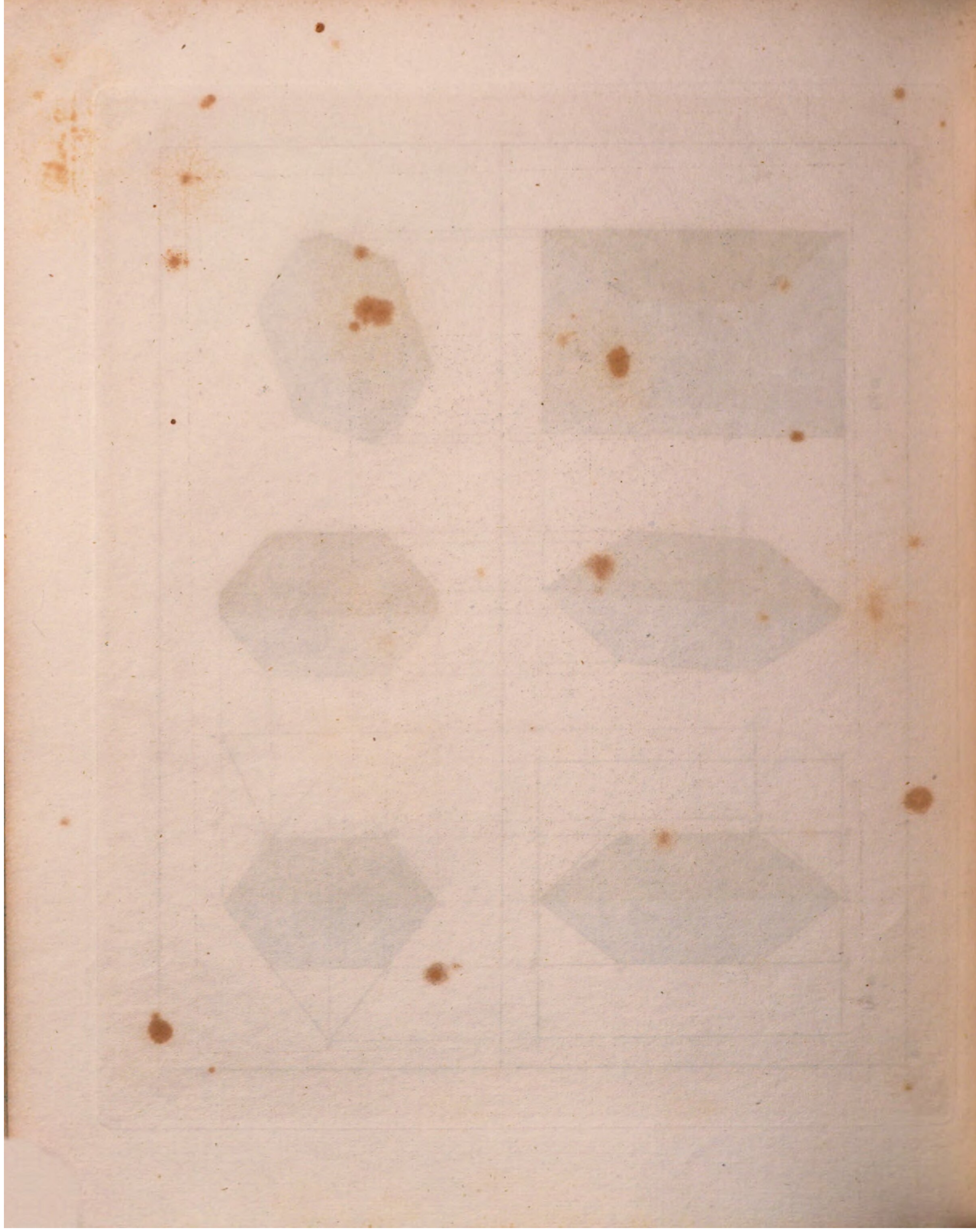
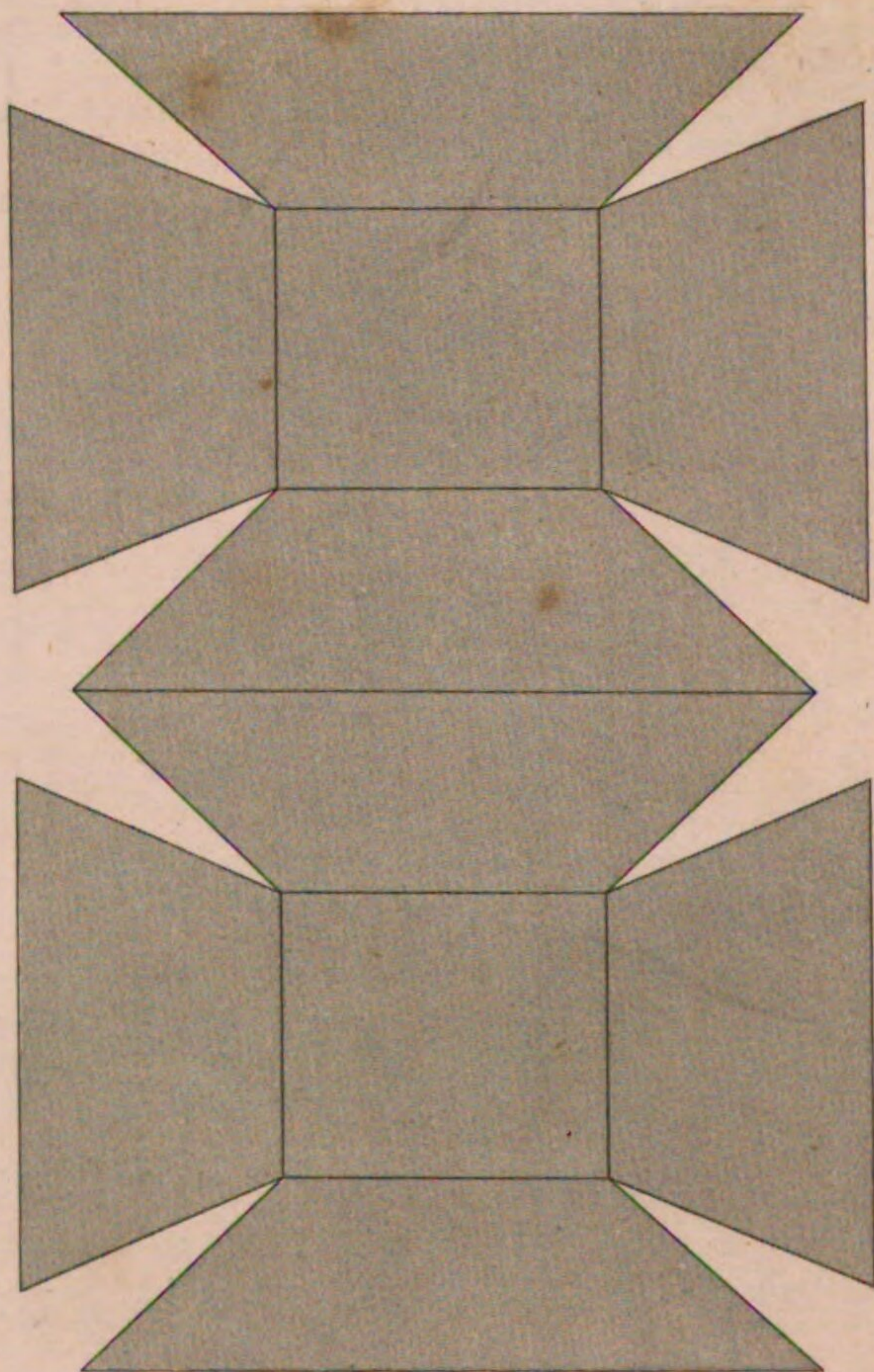


Fig. 89.





Tab XXIV



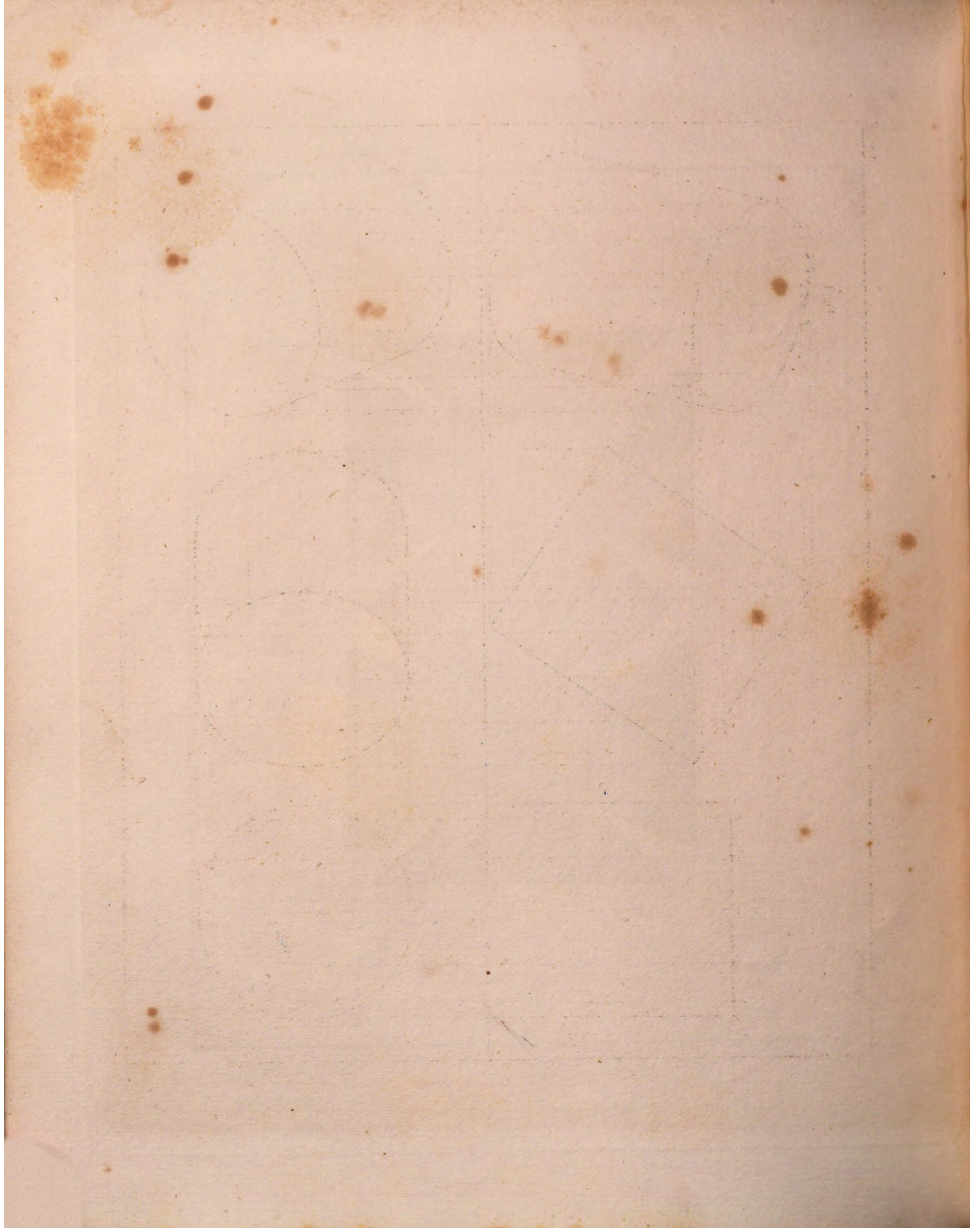


Fig. 1.

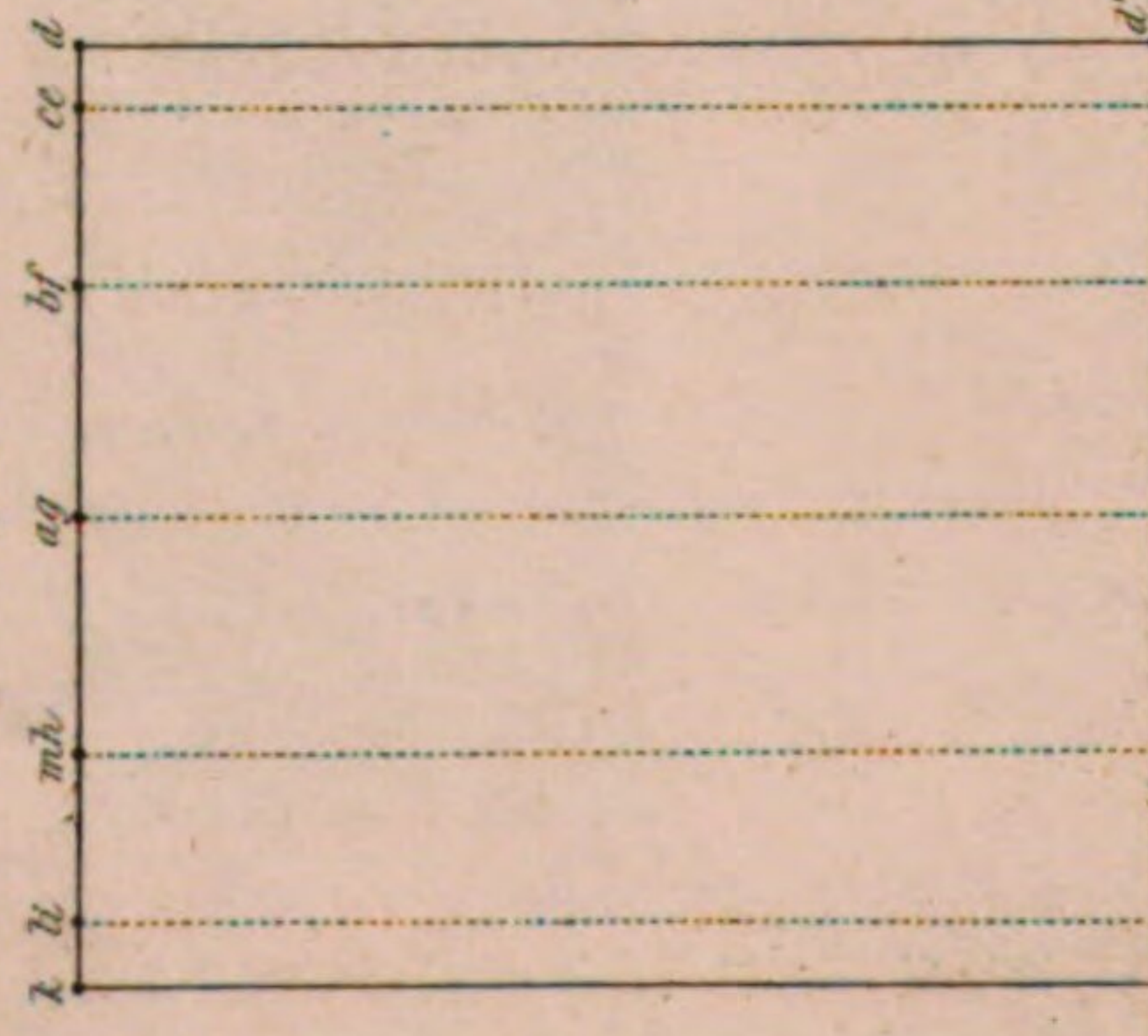


Fig. 2.

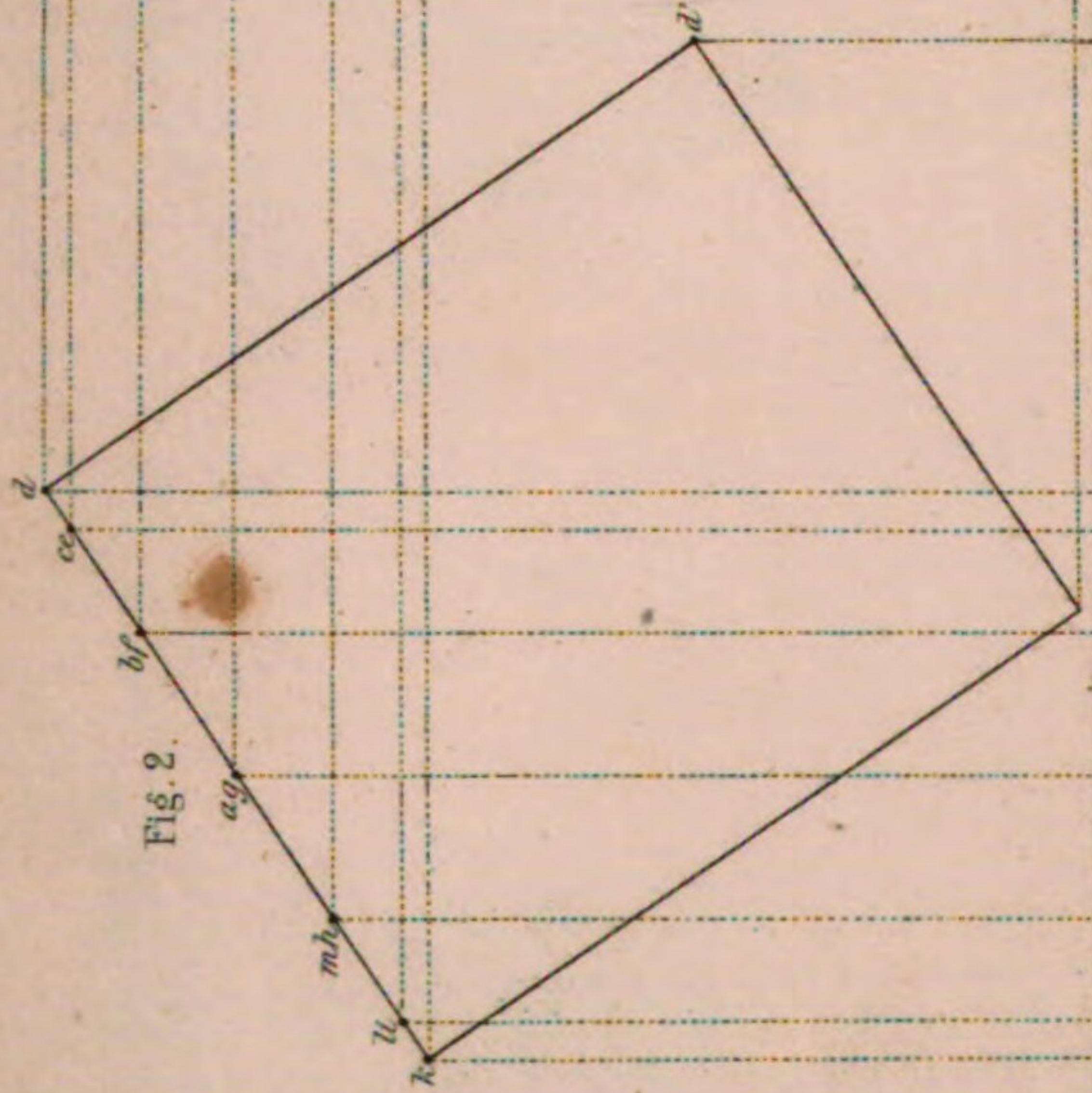


Fig. 3.

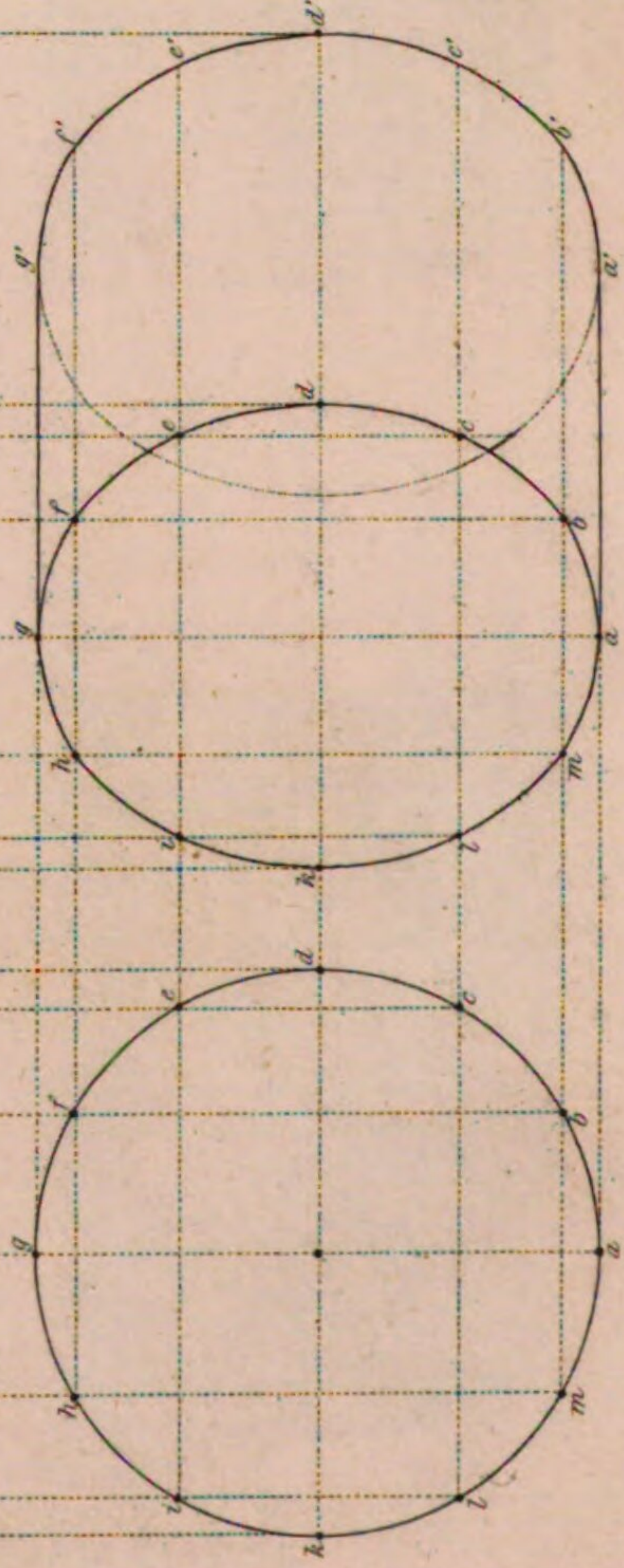
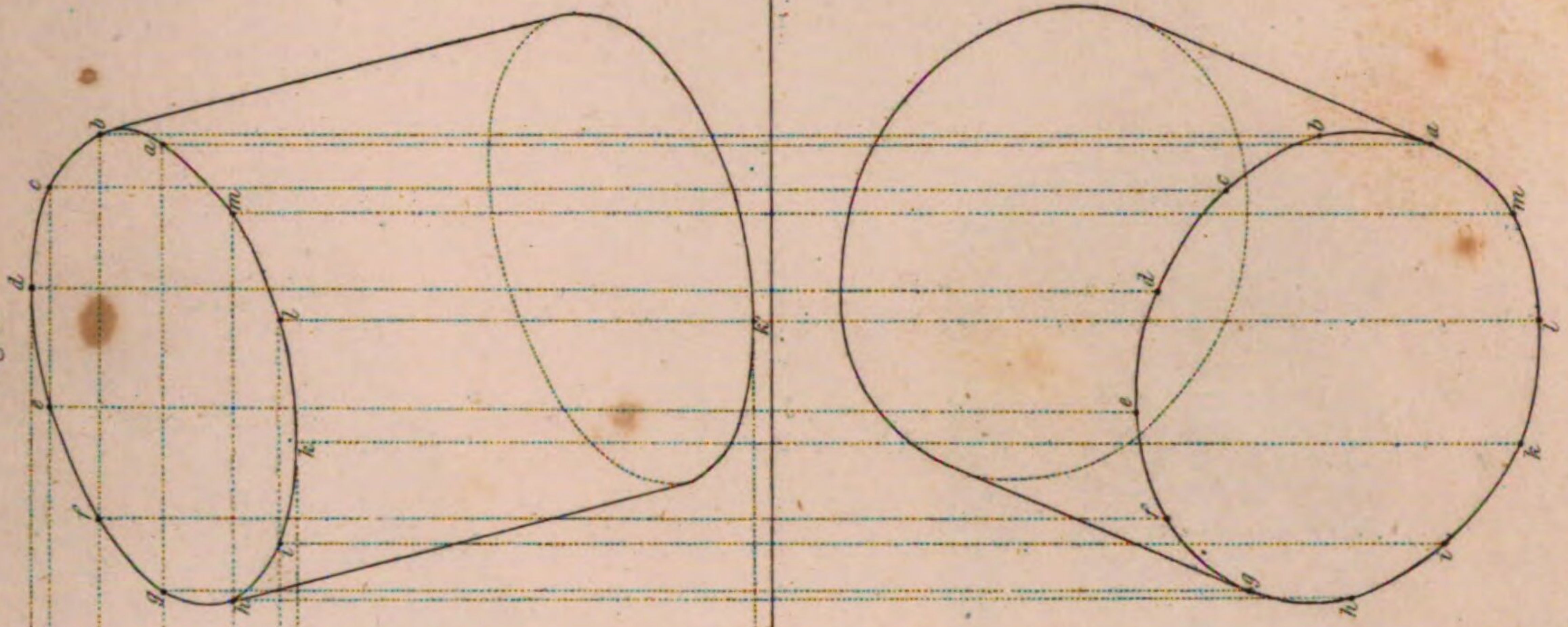


Fig 4.

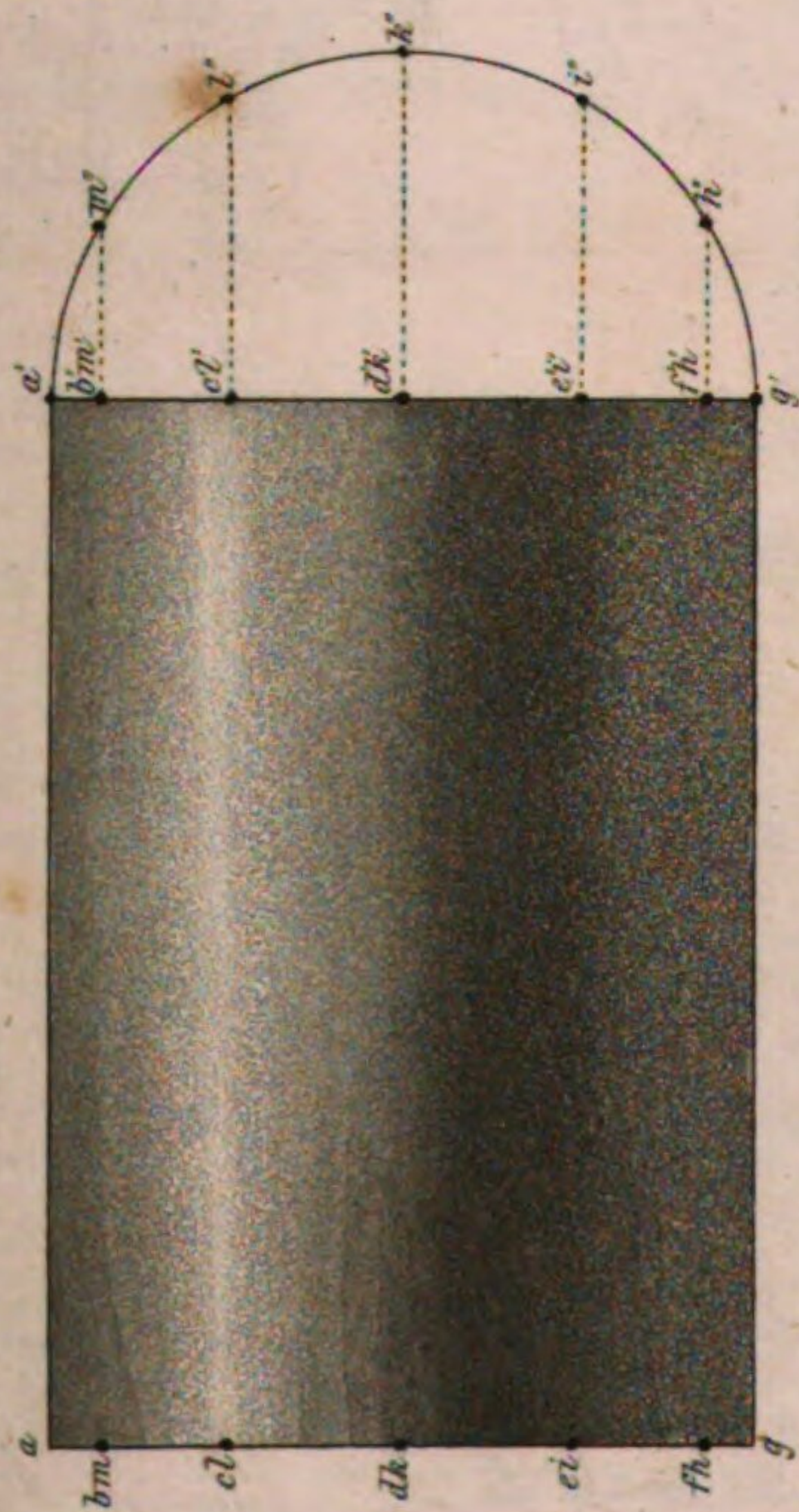


Fig 5.

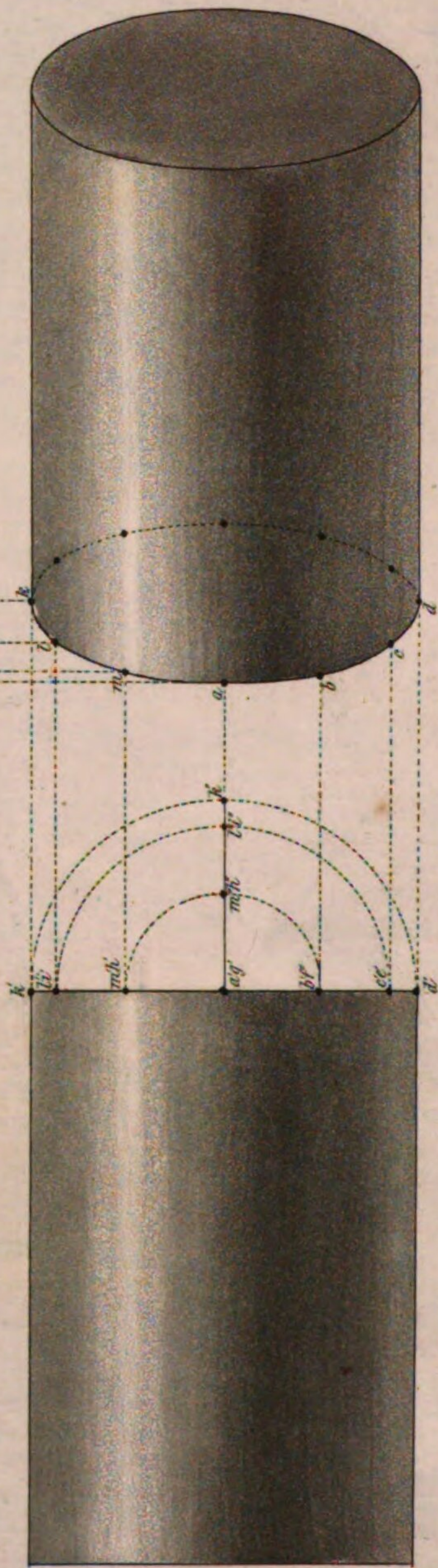
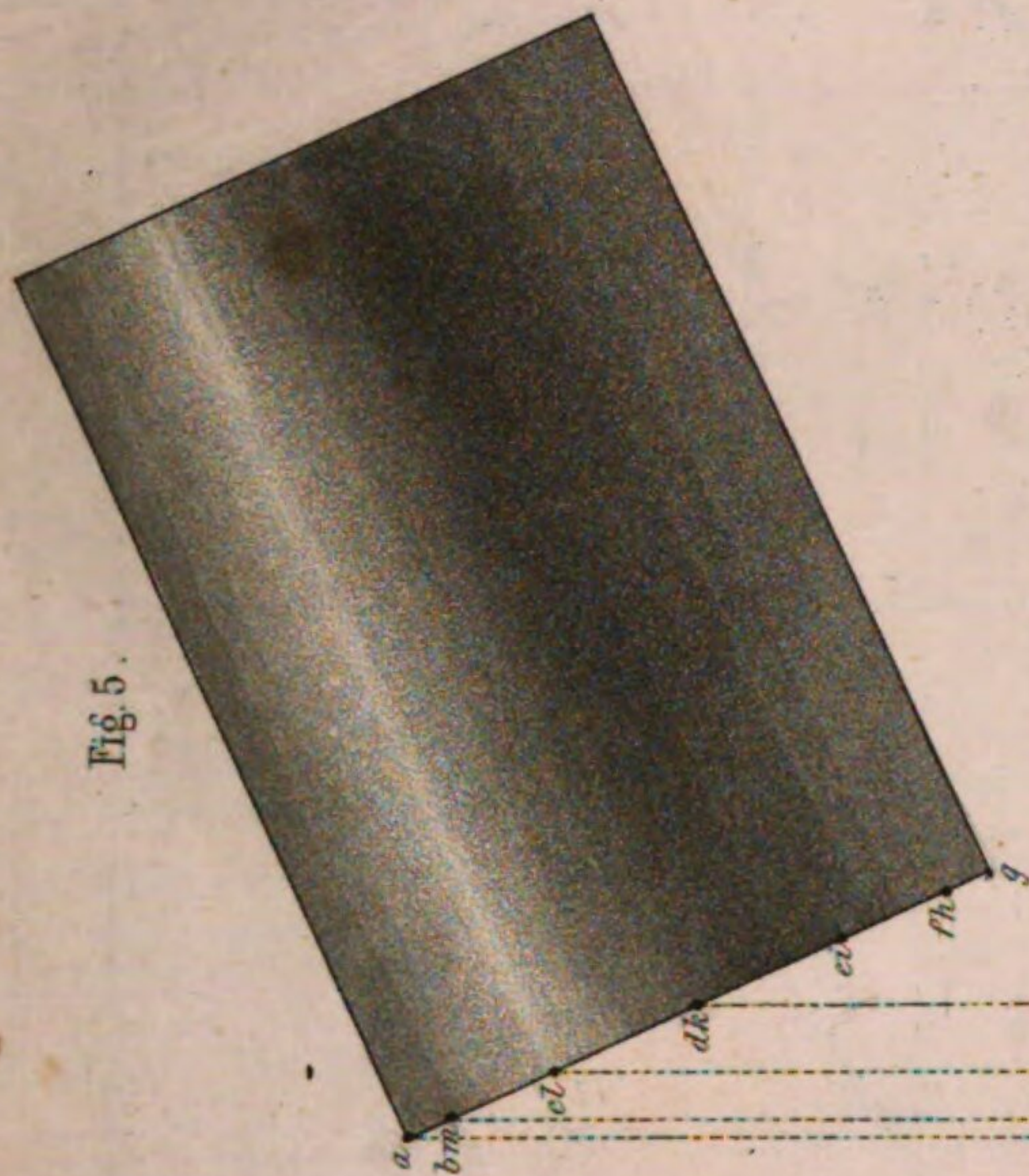


Fig. 6.

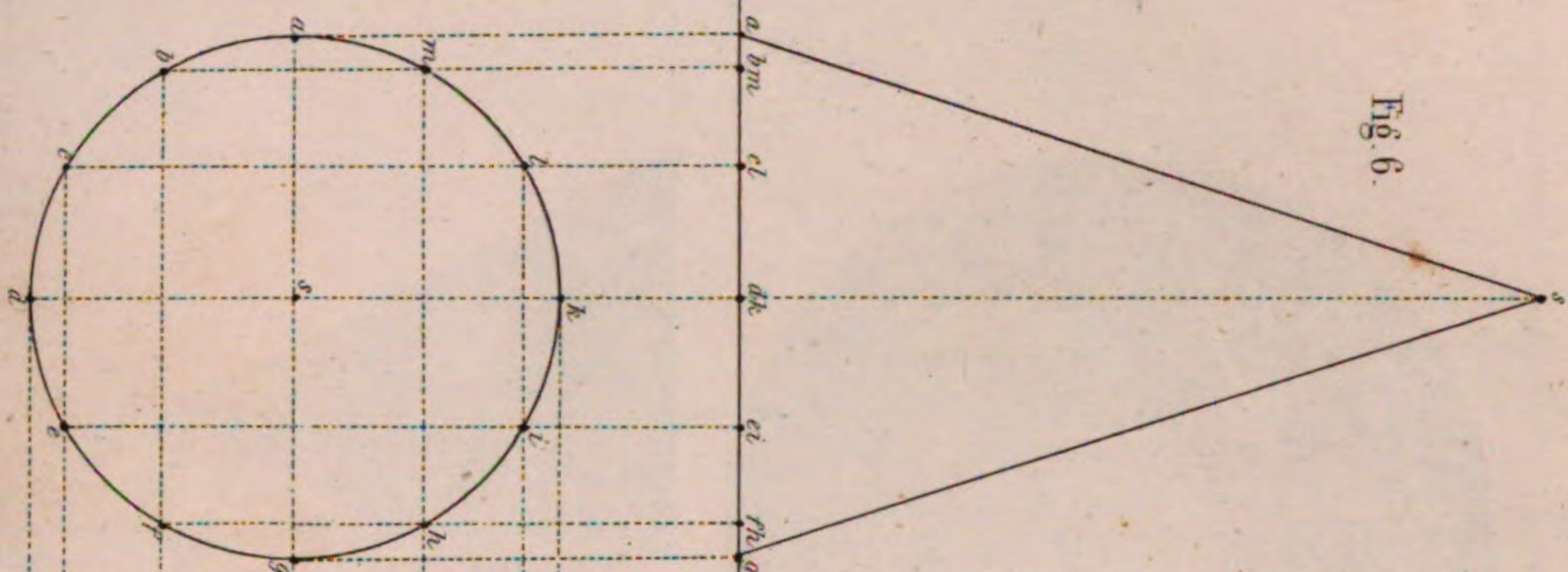


Fig. 7.

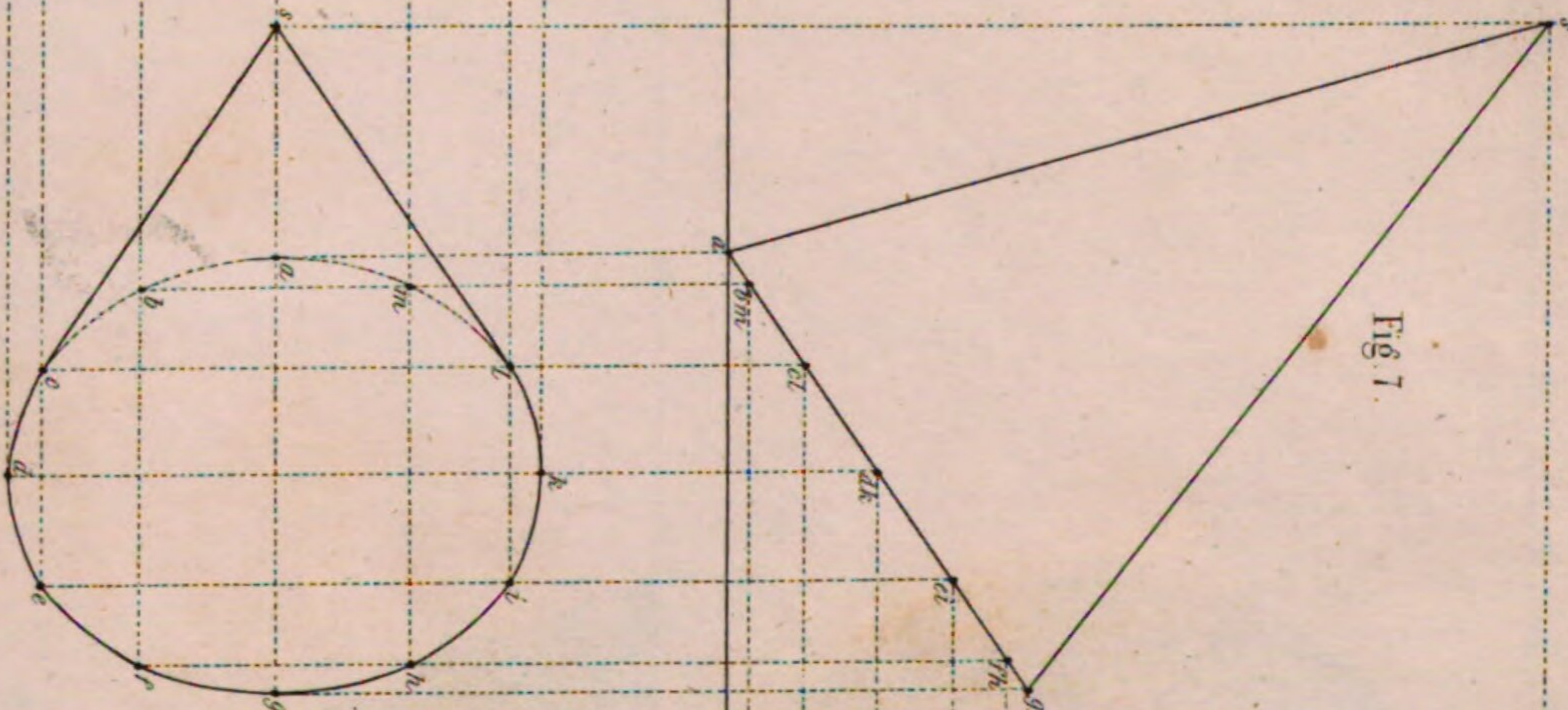
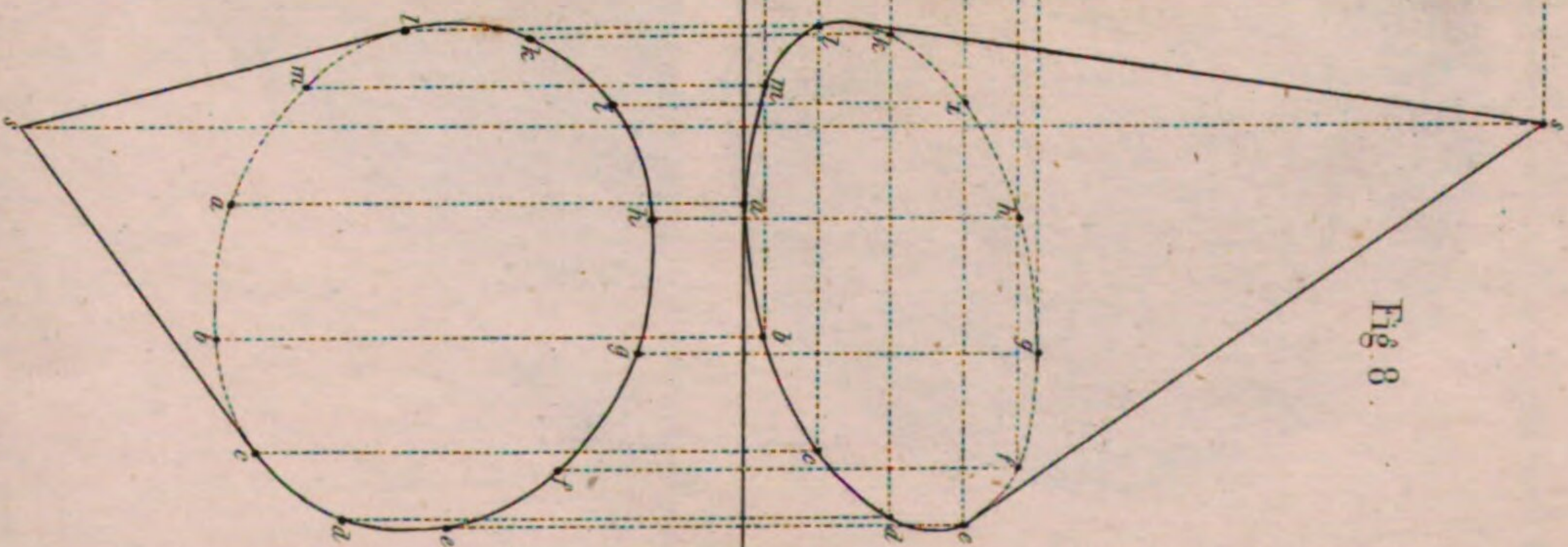


Fig. 8.



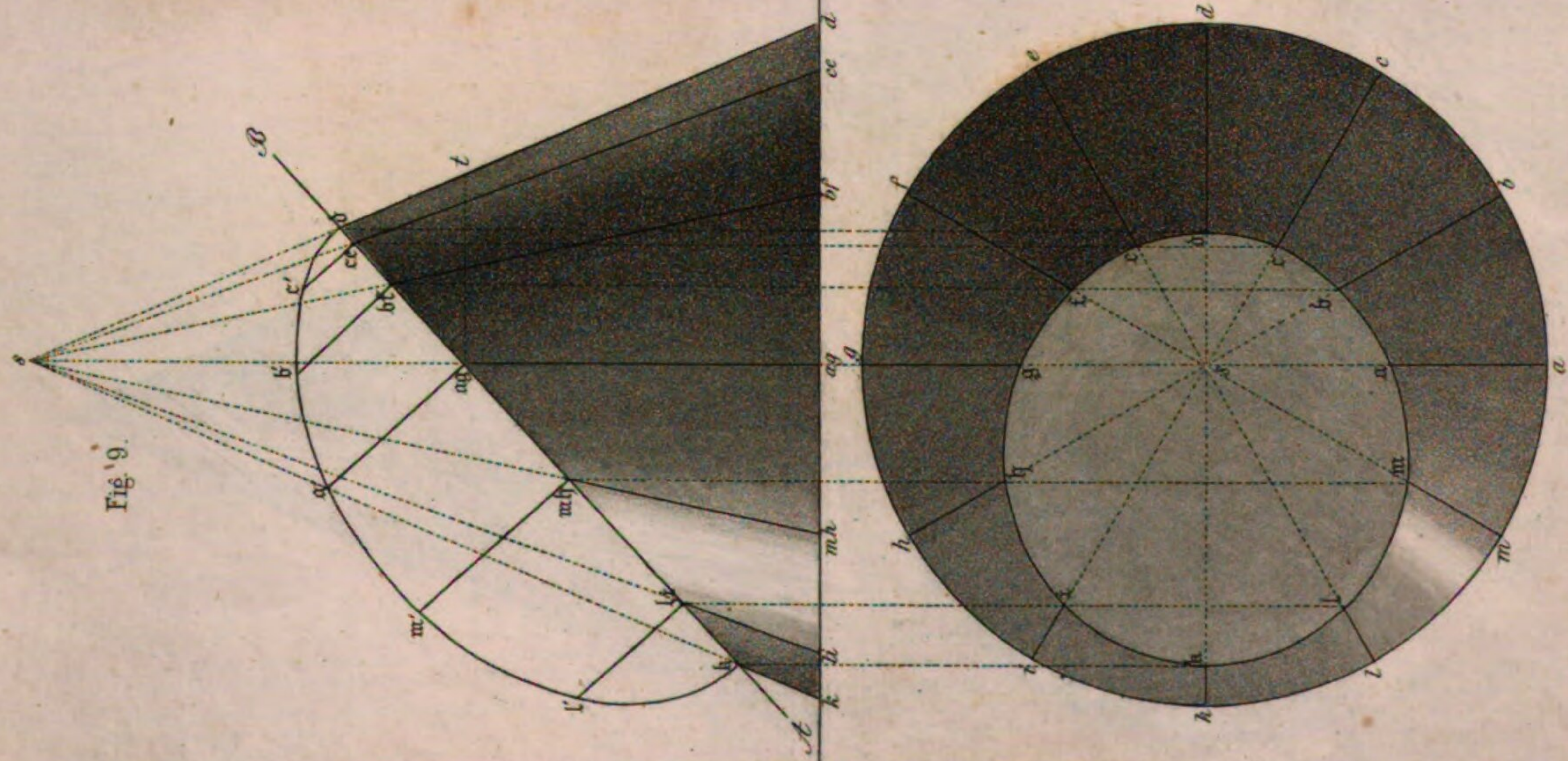


Fig. 9.

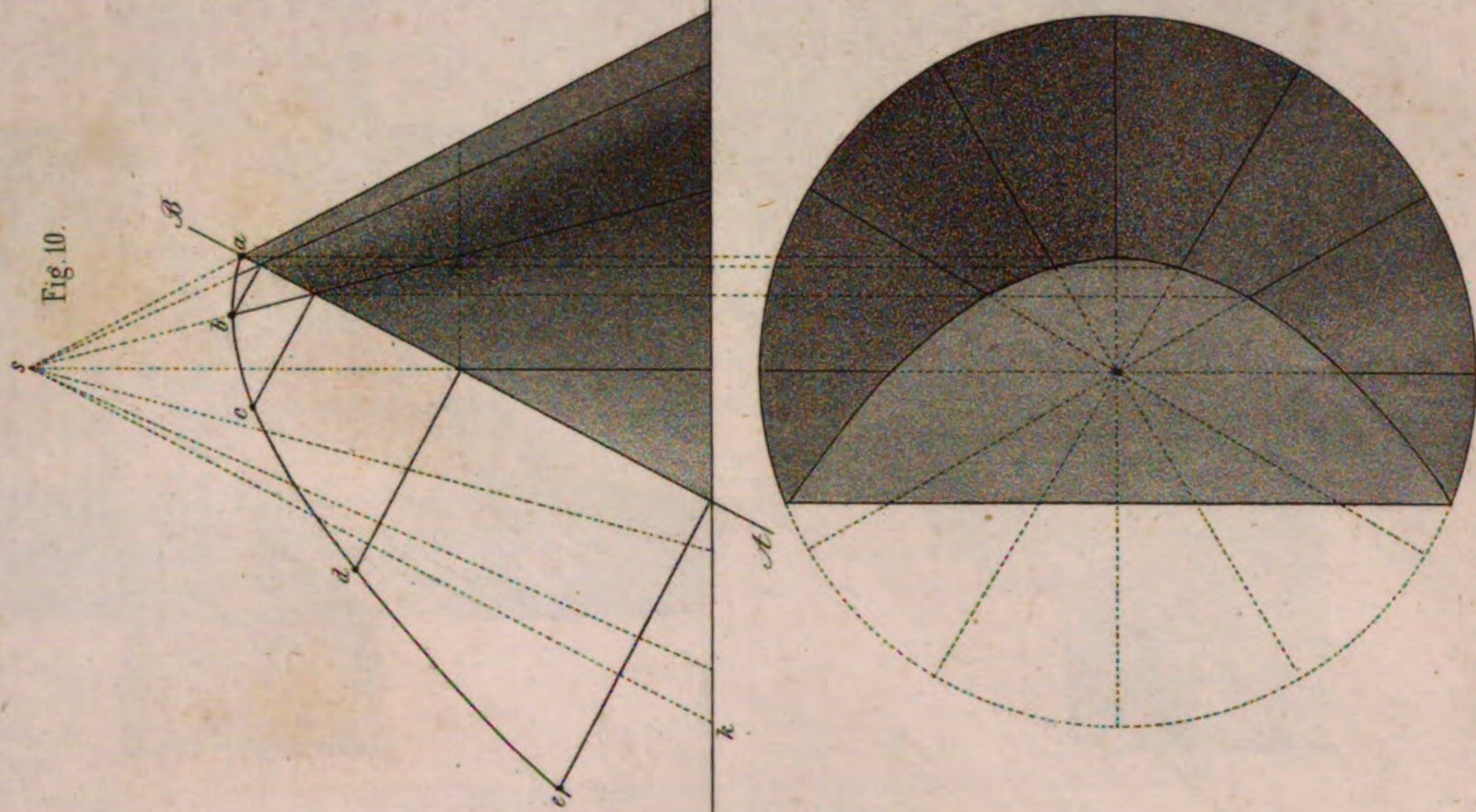


Fig. 10.

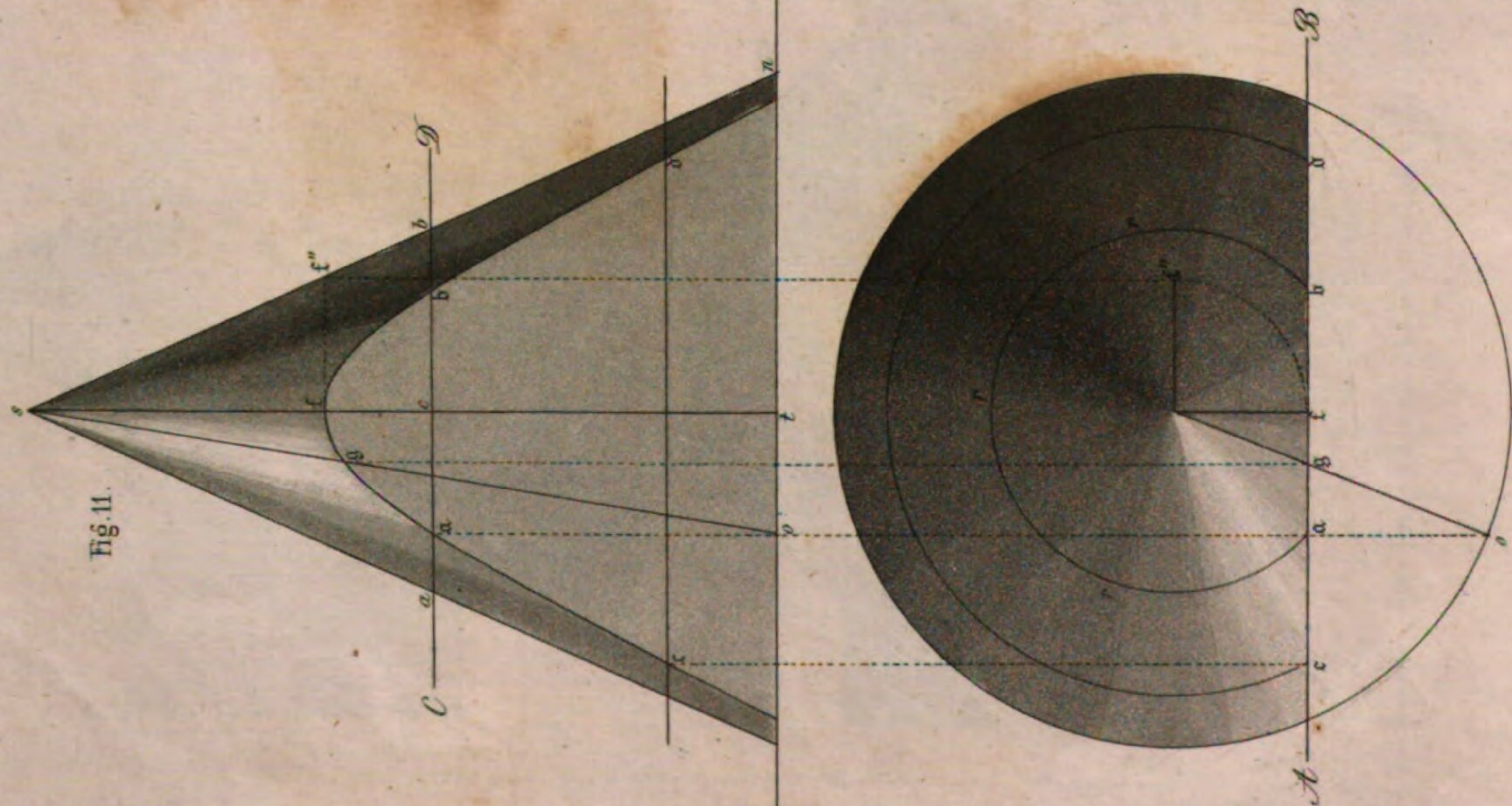


Fig. 12.

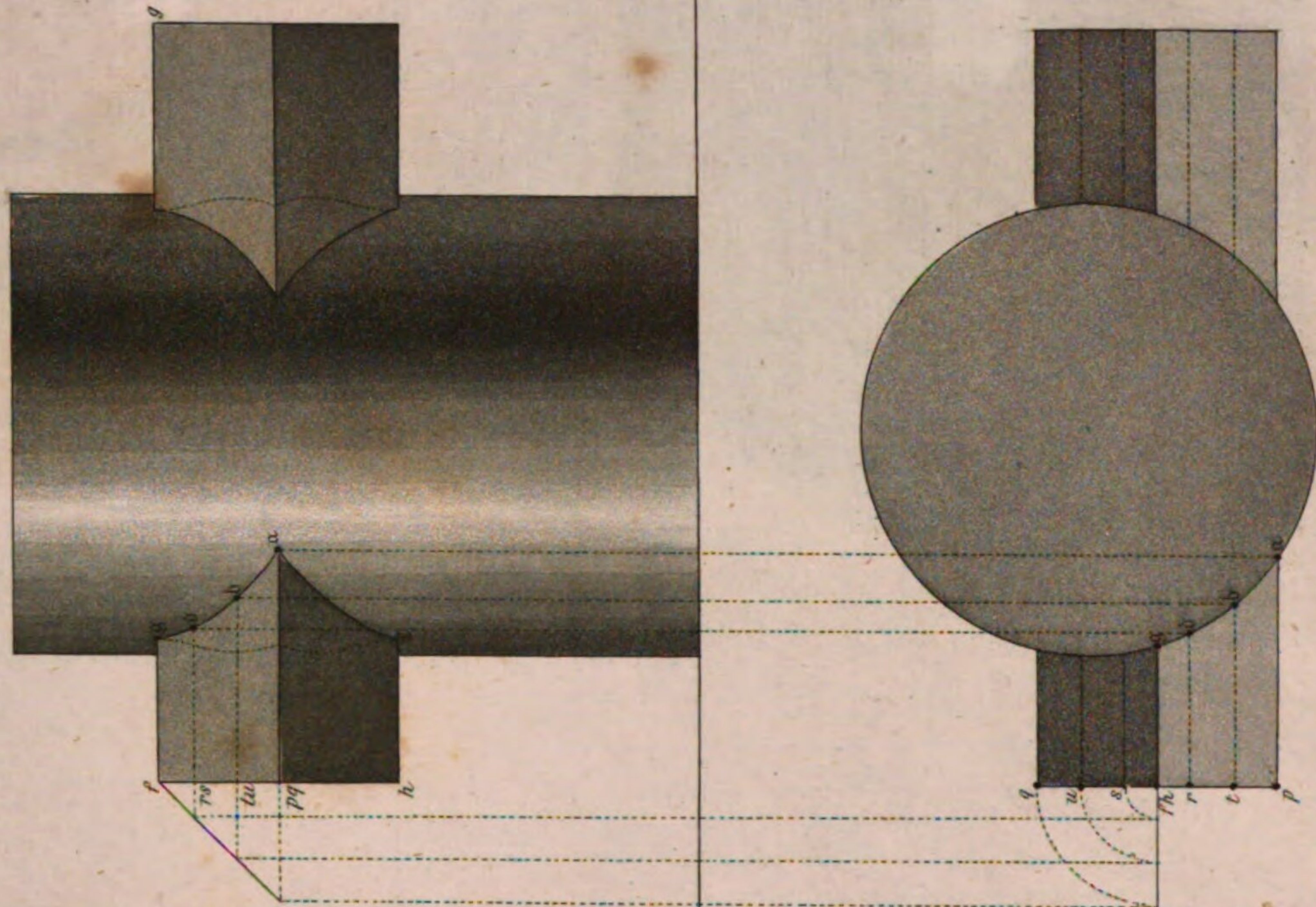


Fig. 13.

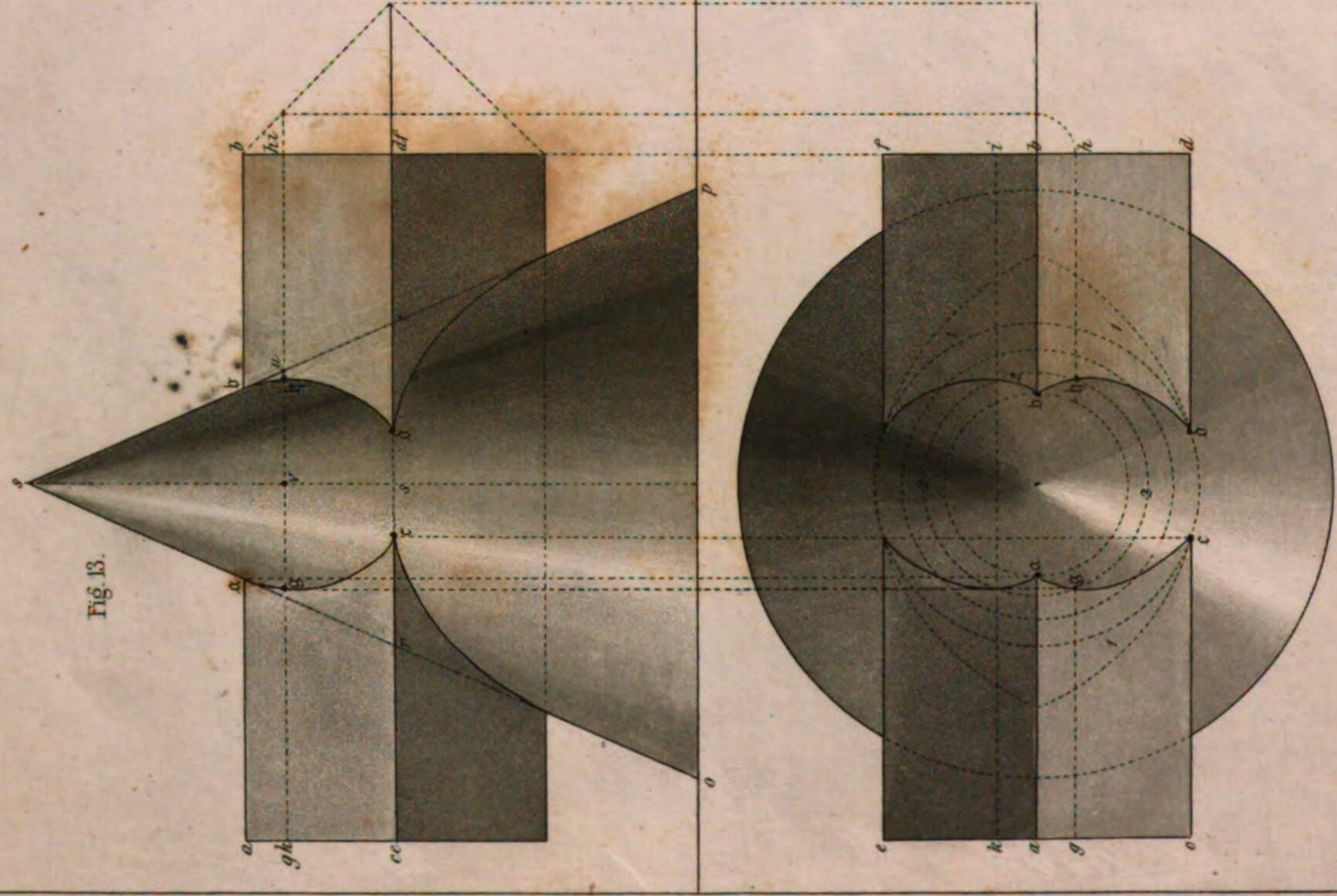


Fig. 14.

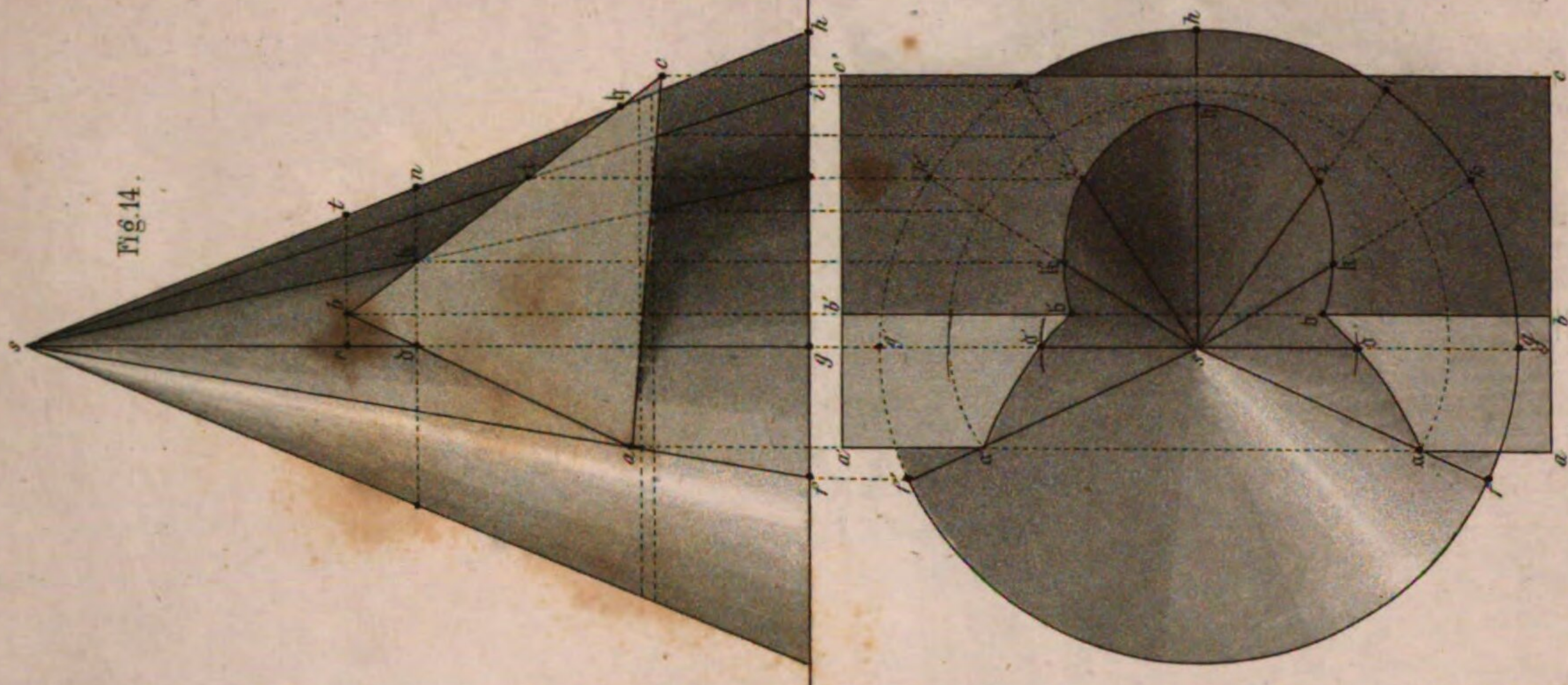




Fig. 15.

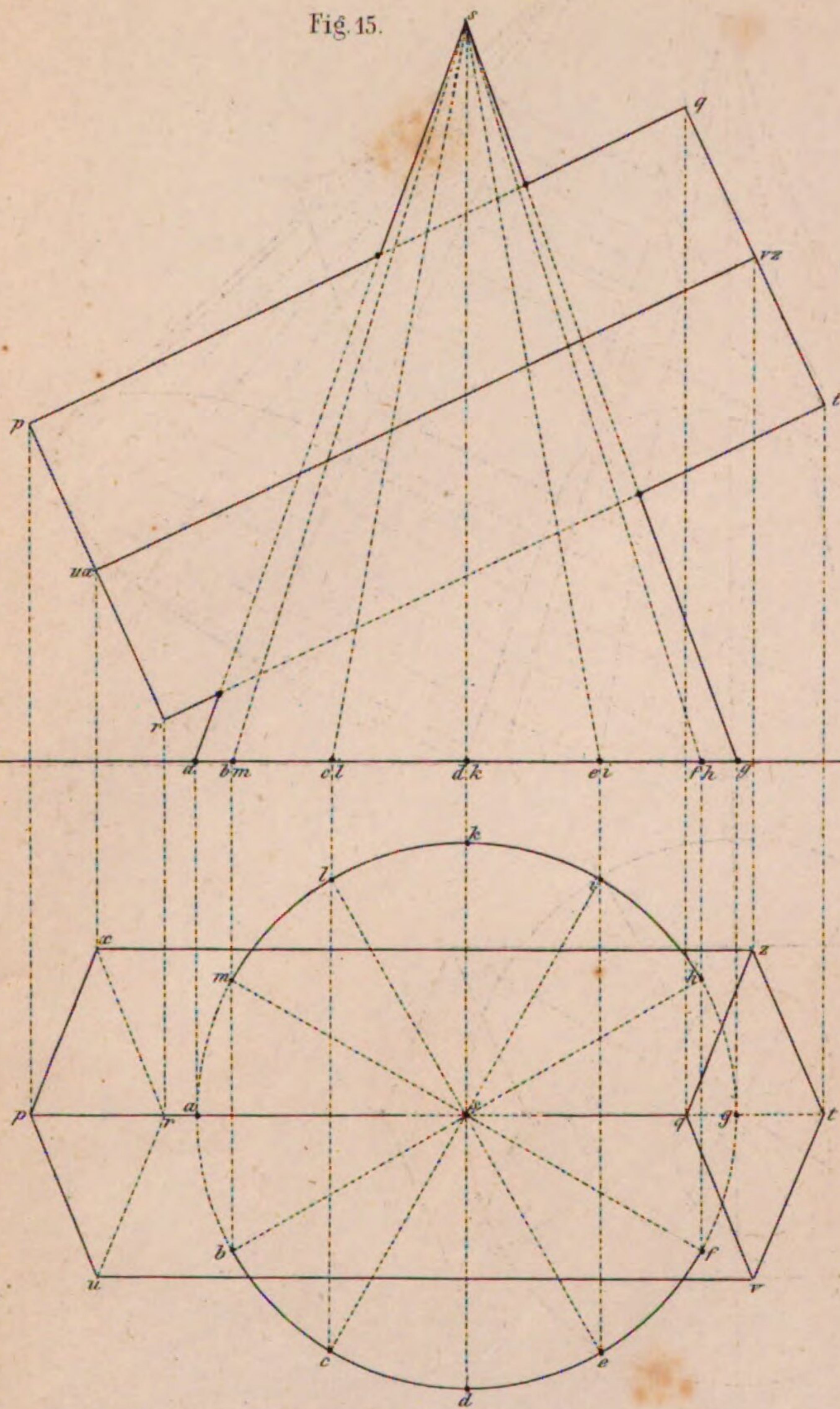


Fig. 16.

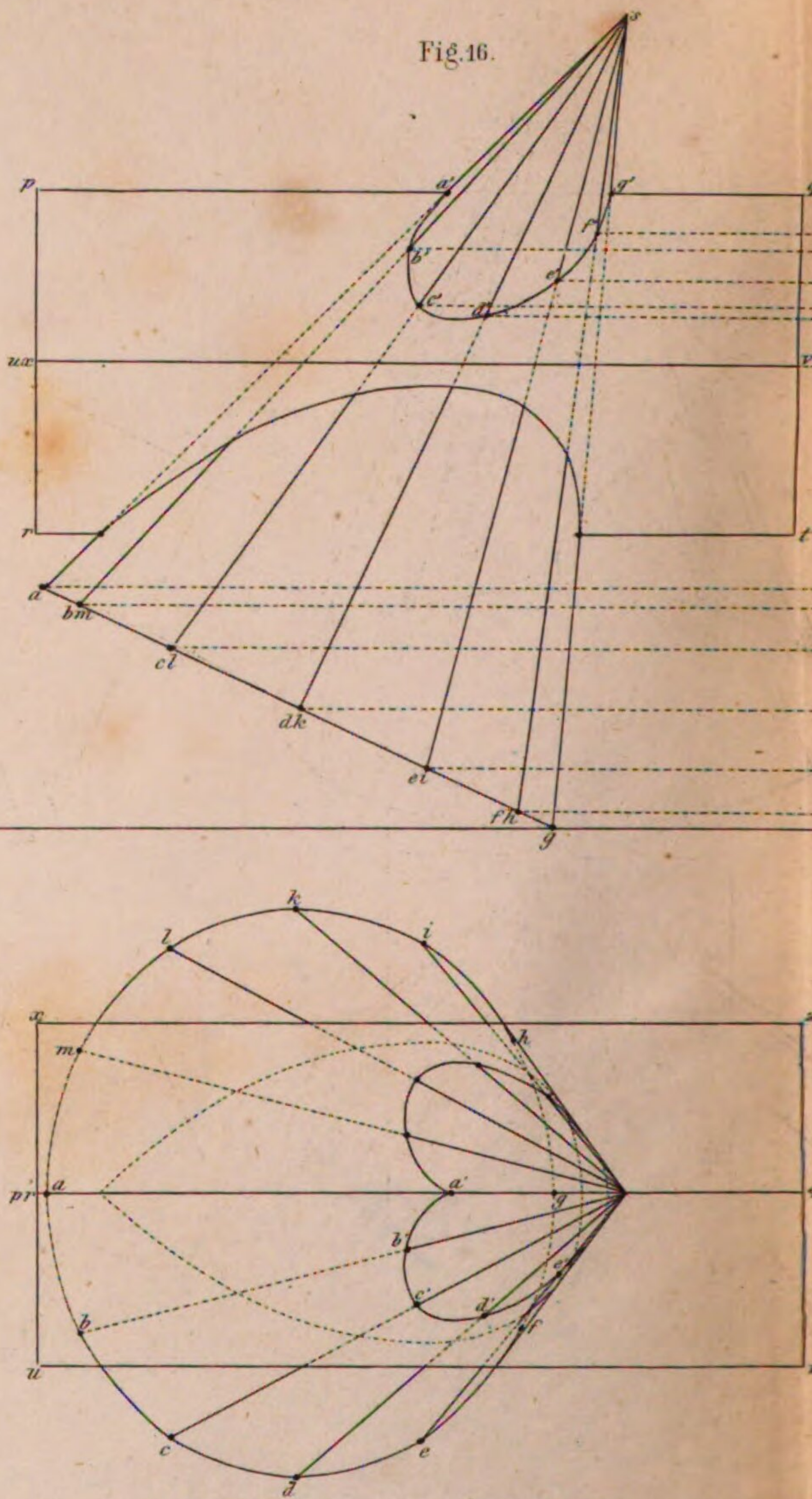


Fig. 17.

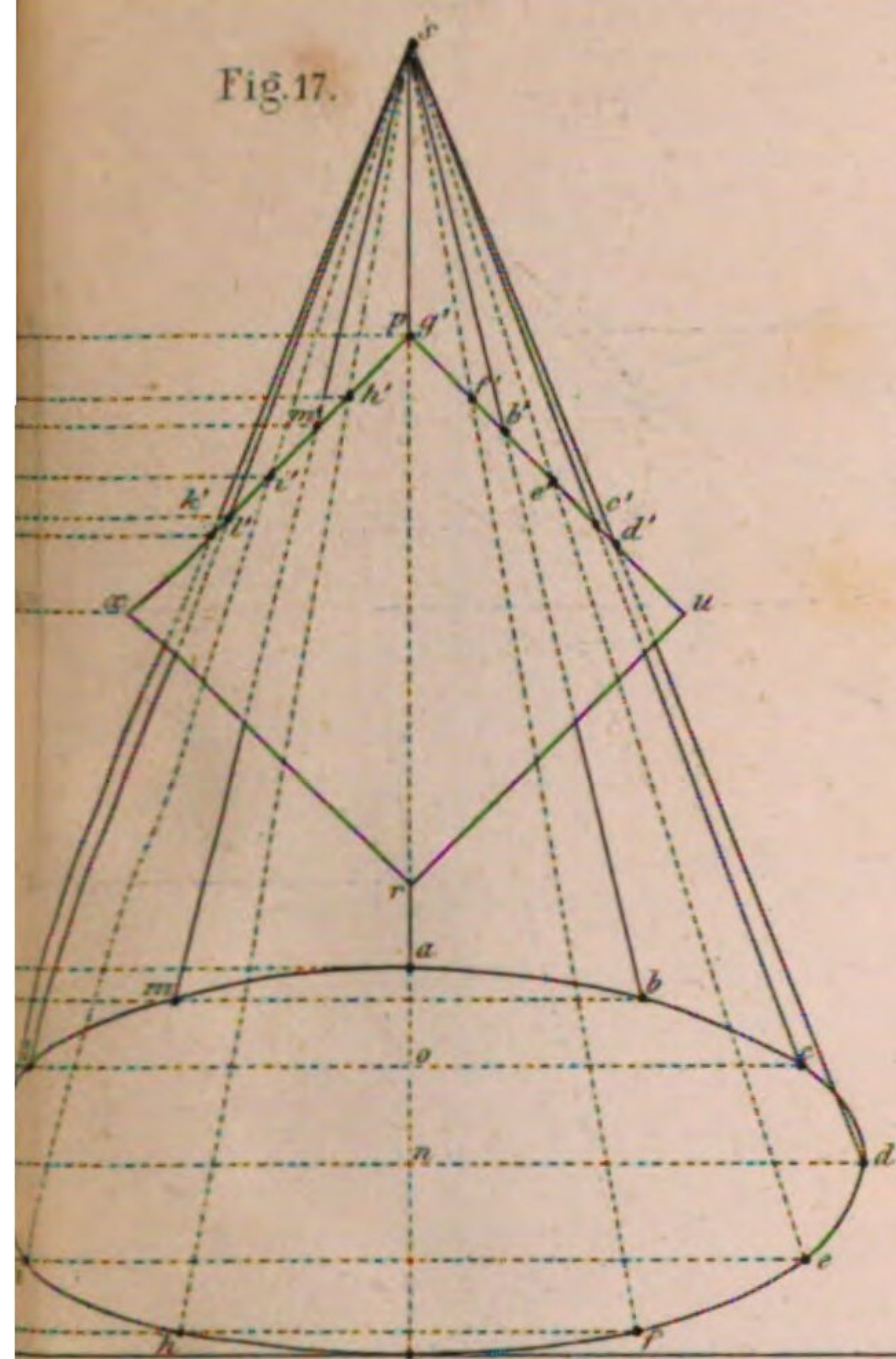


Fig. 18.

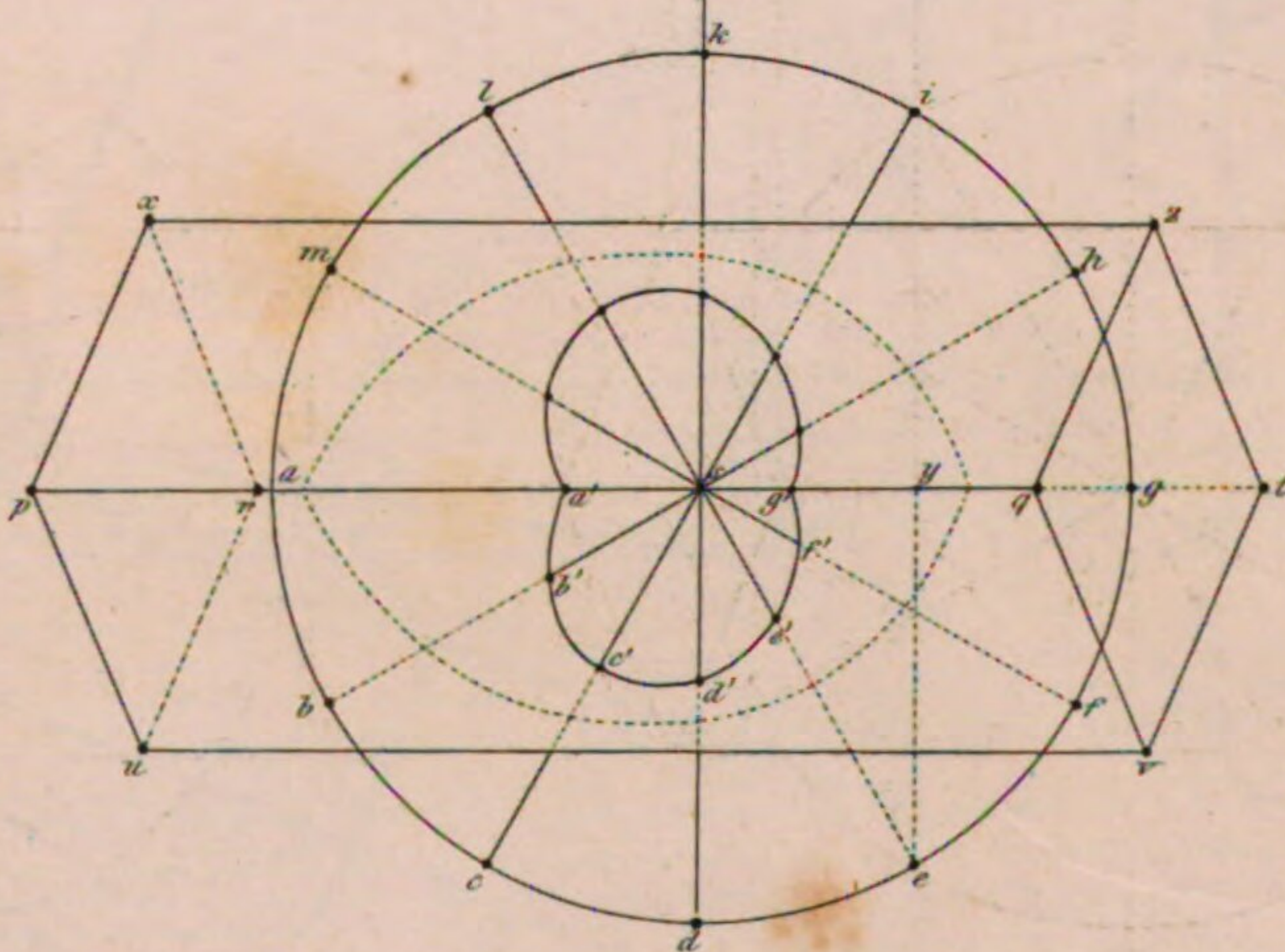
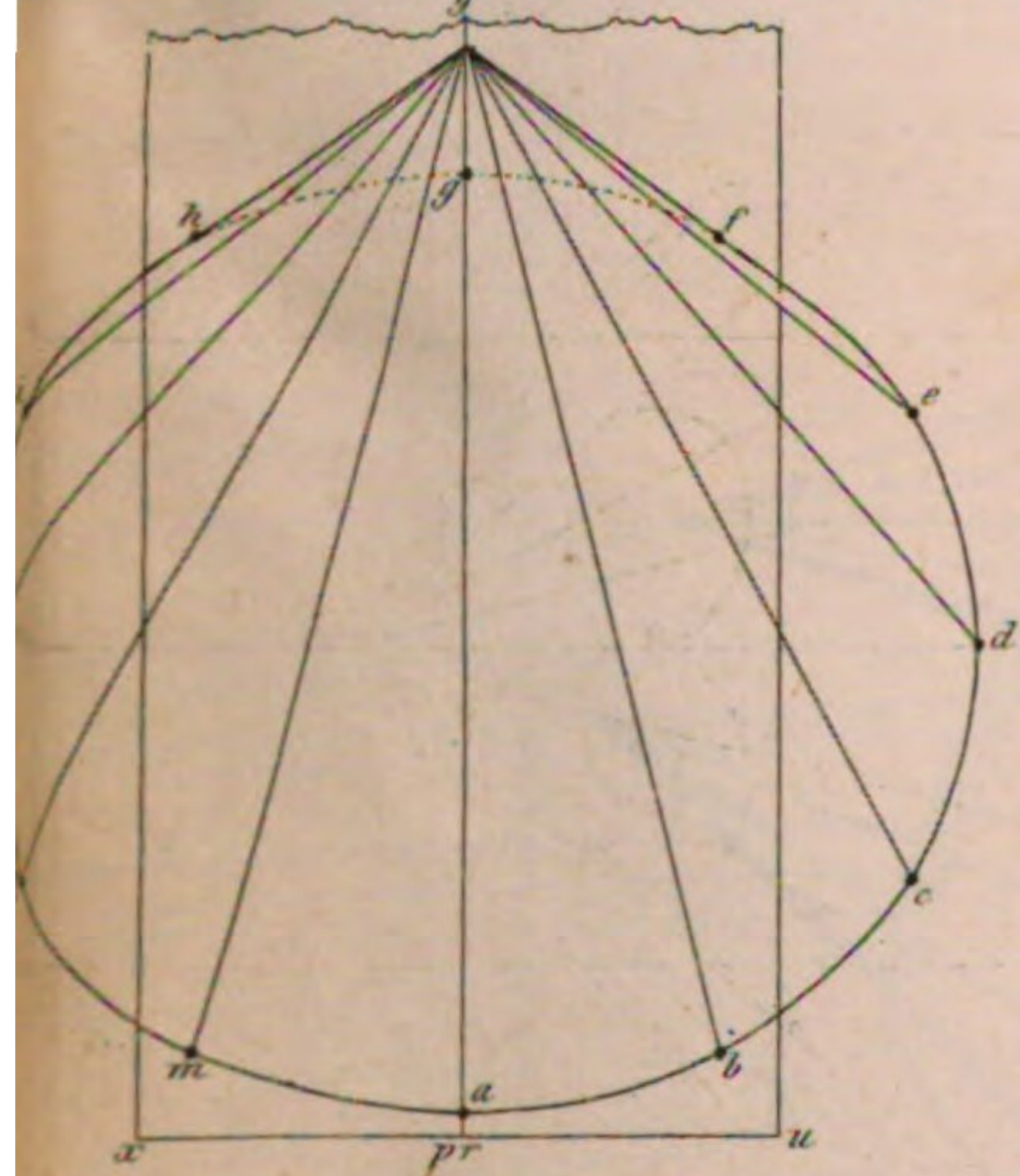
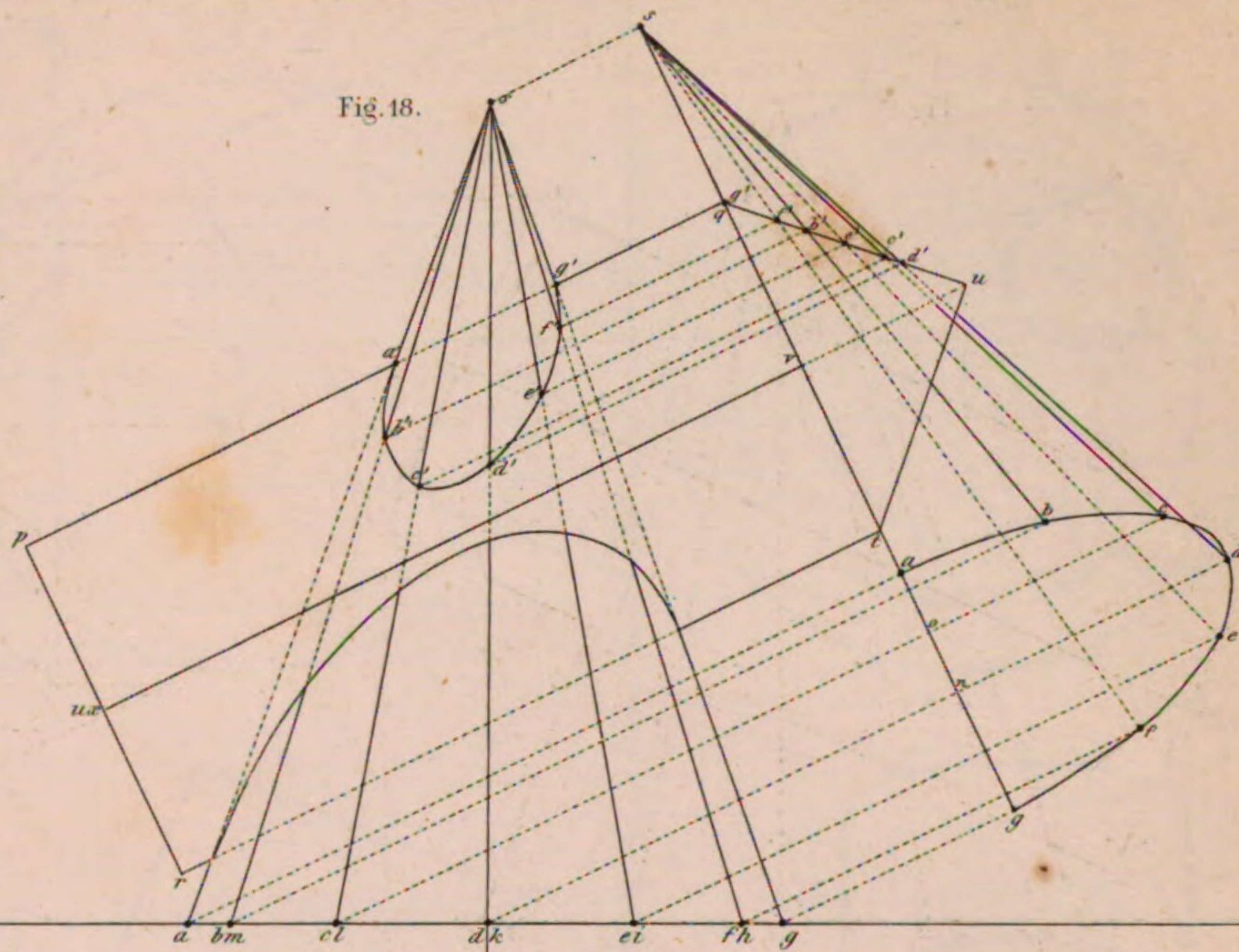


Fig. 15.

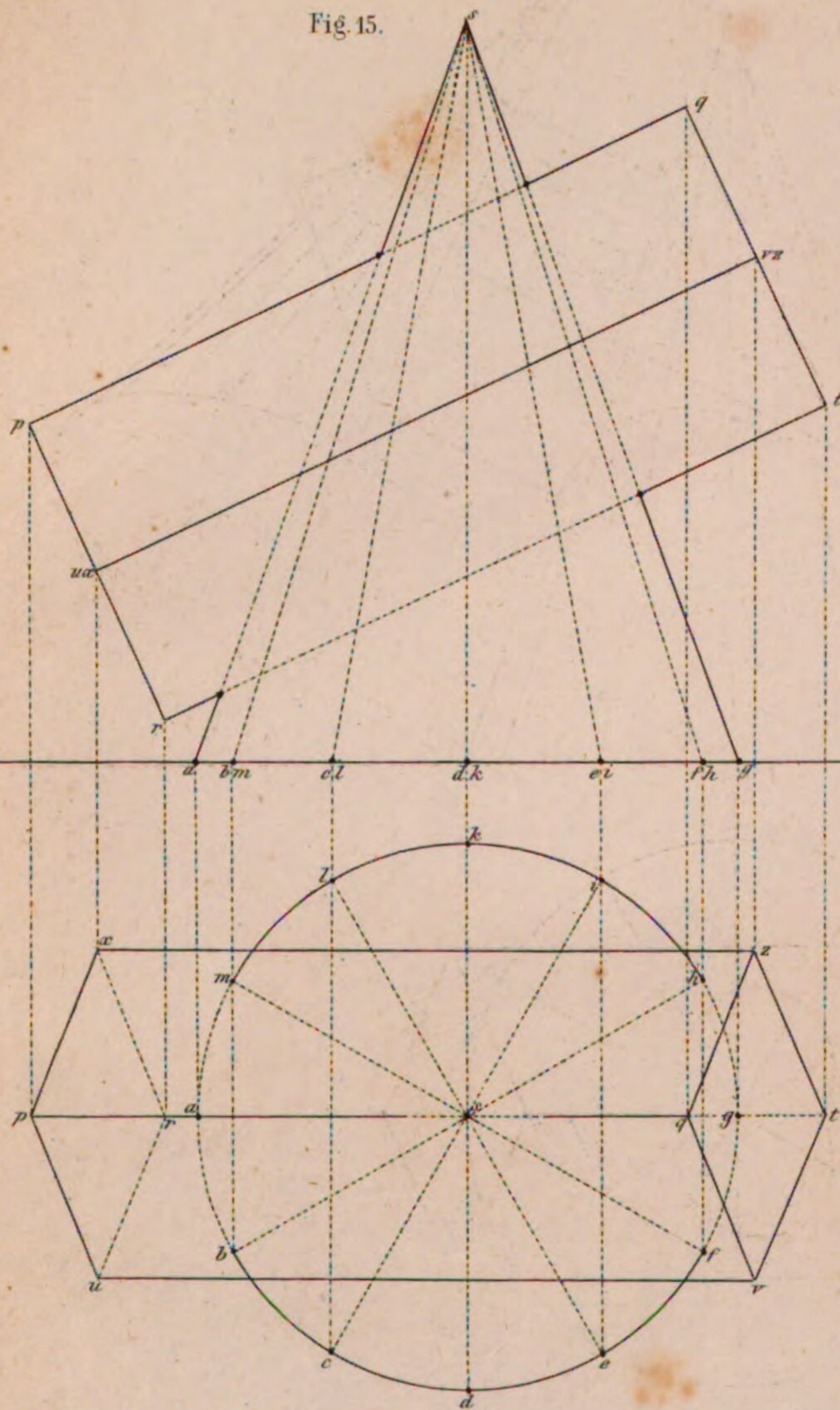


Fig. 16.

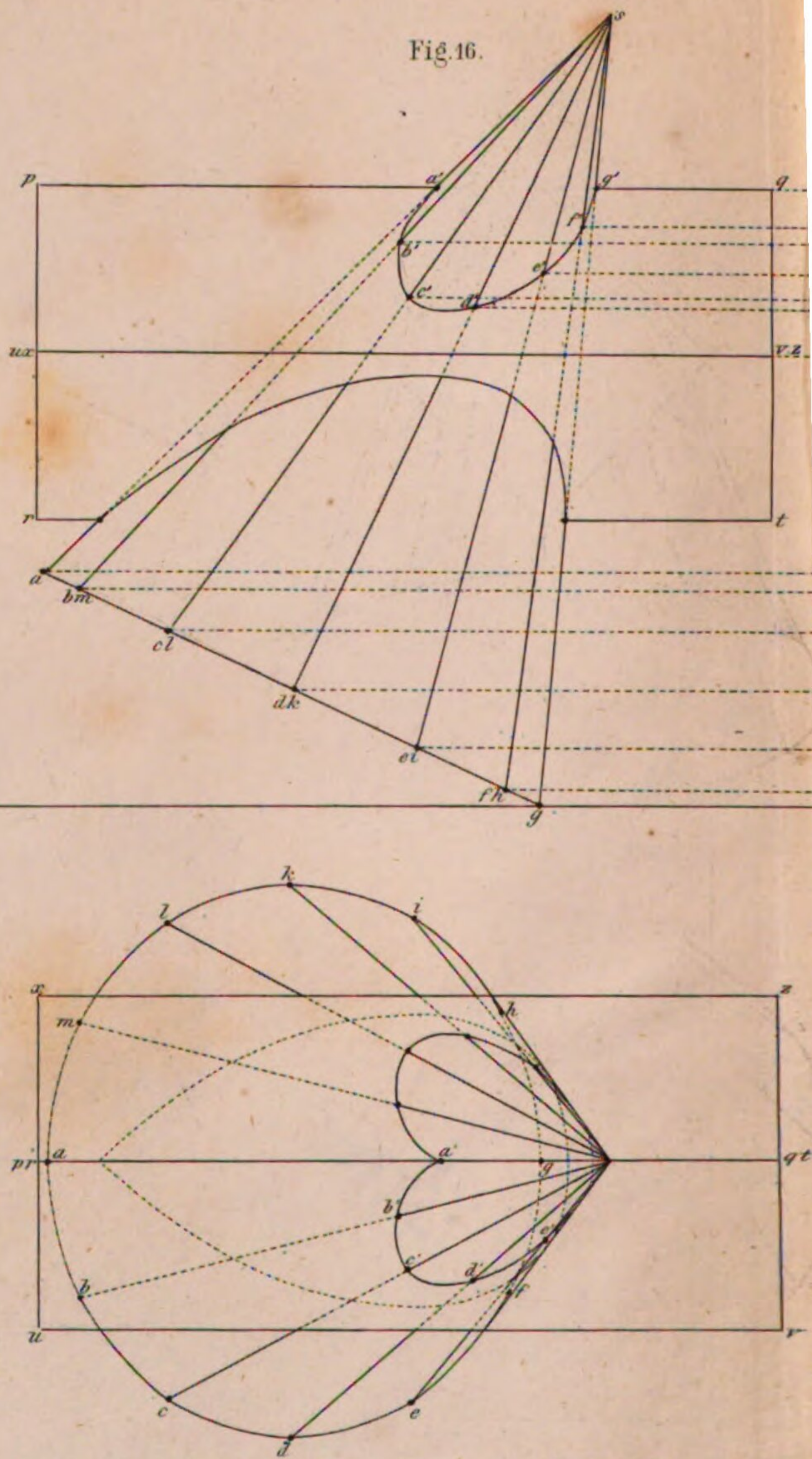


Fig. 17.

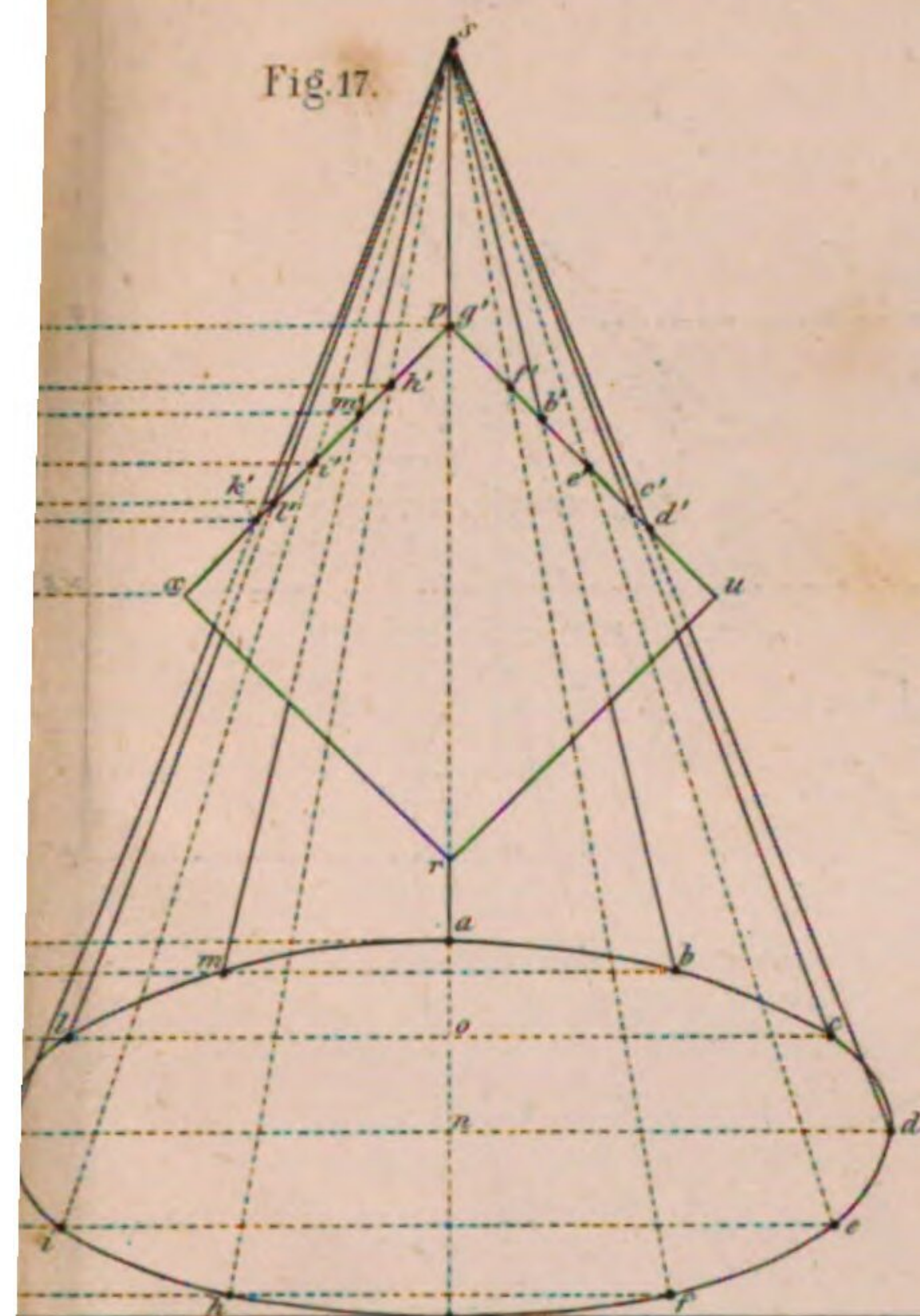
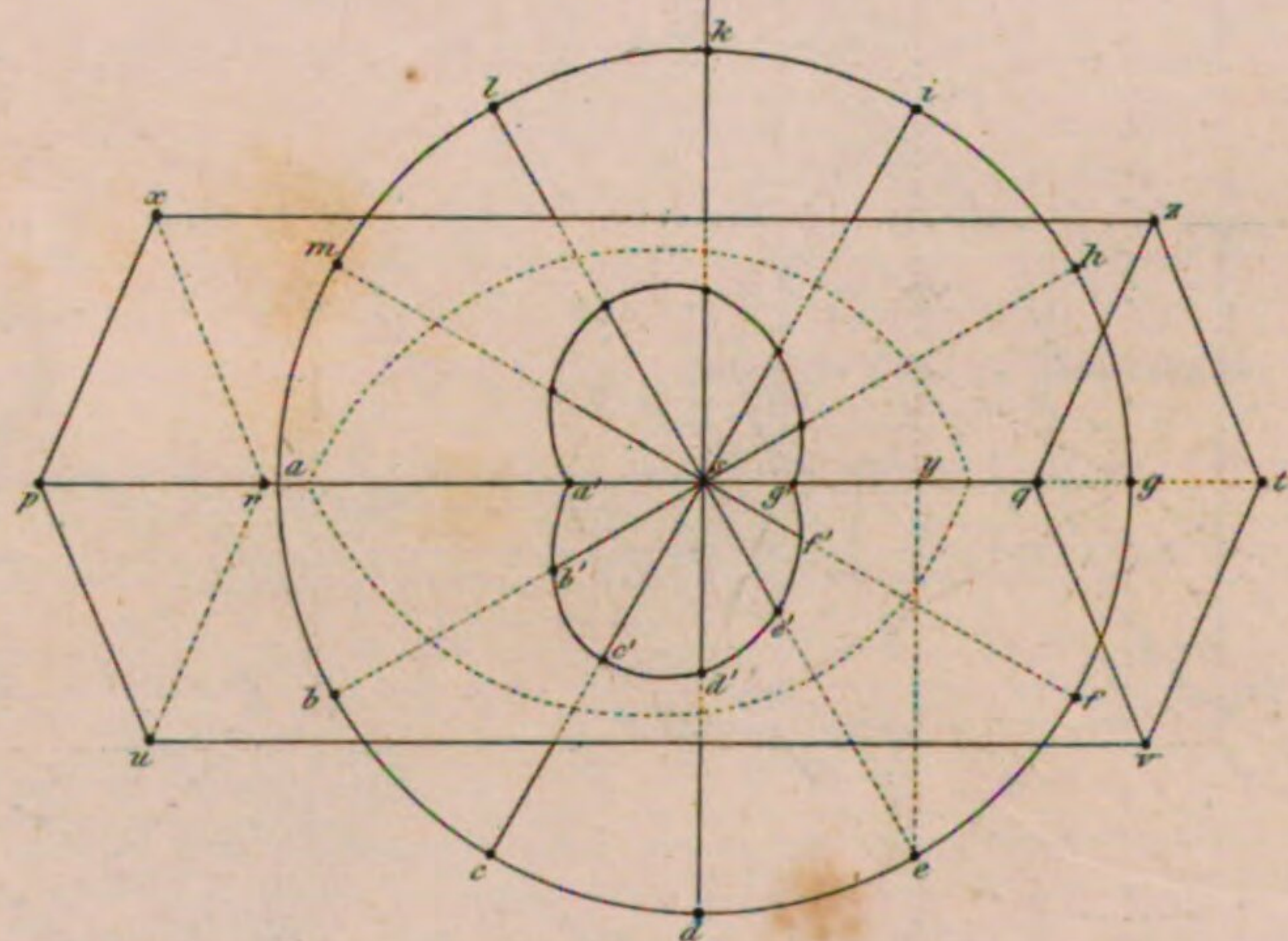
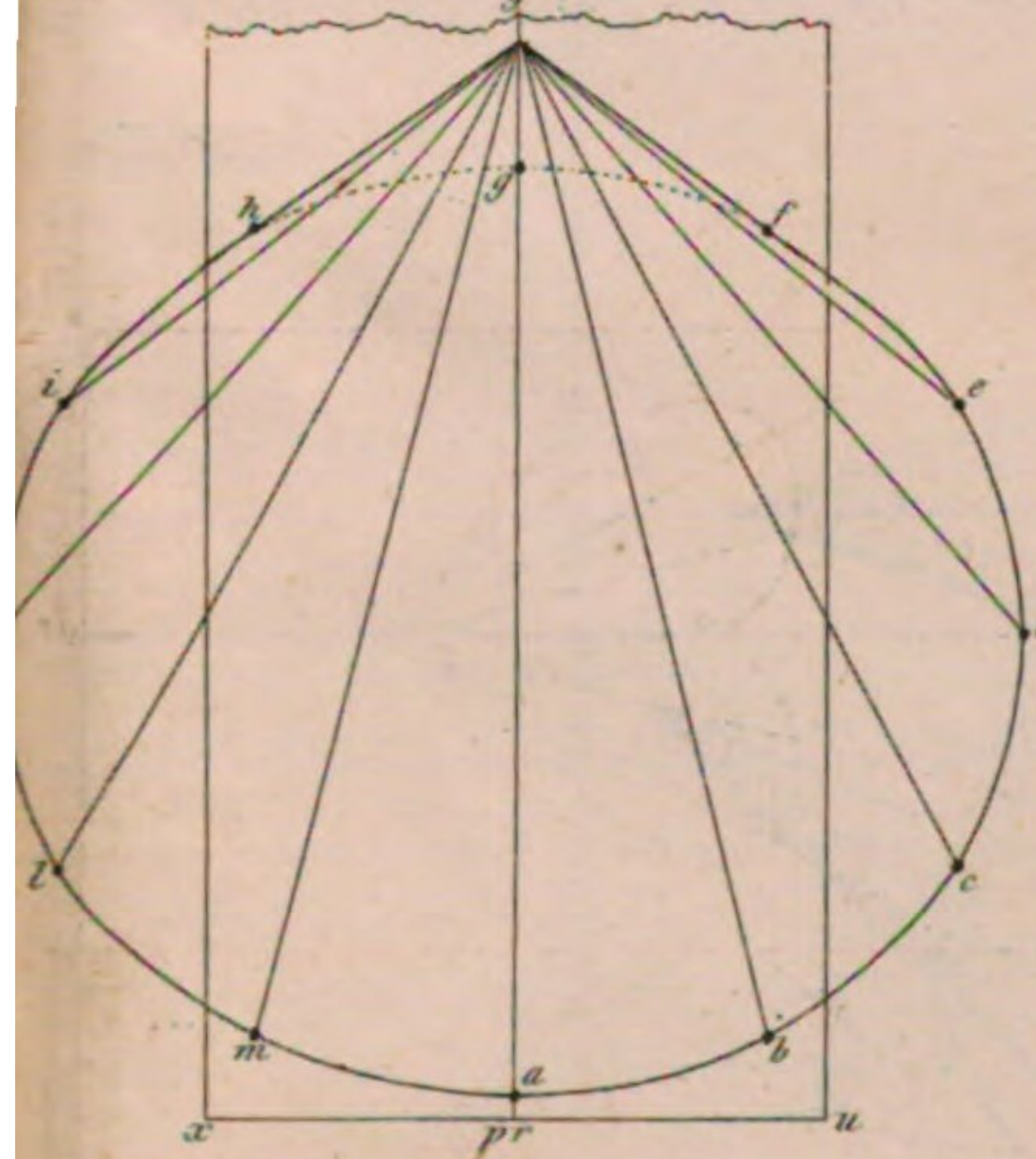
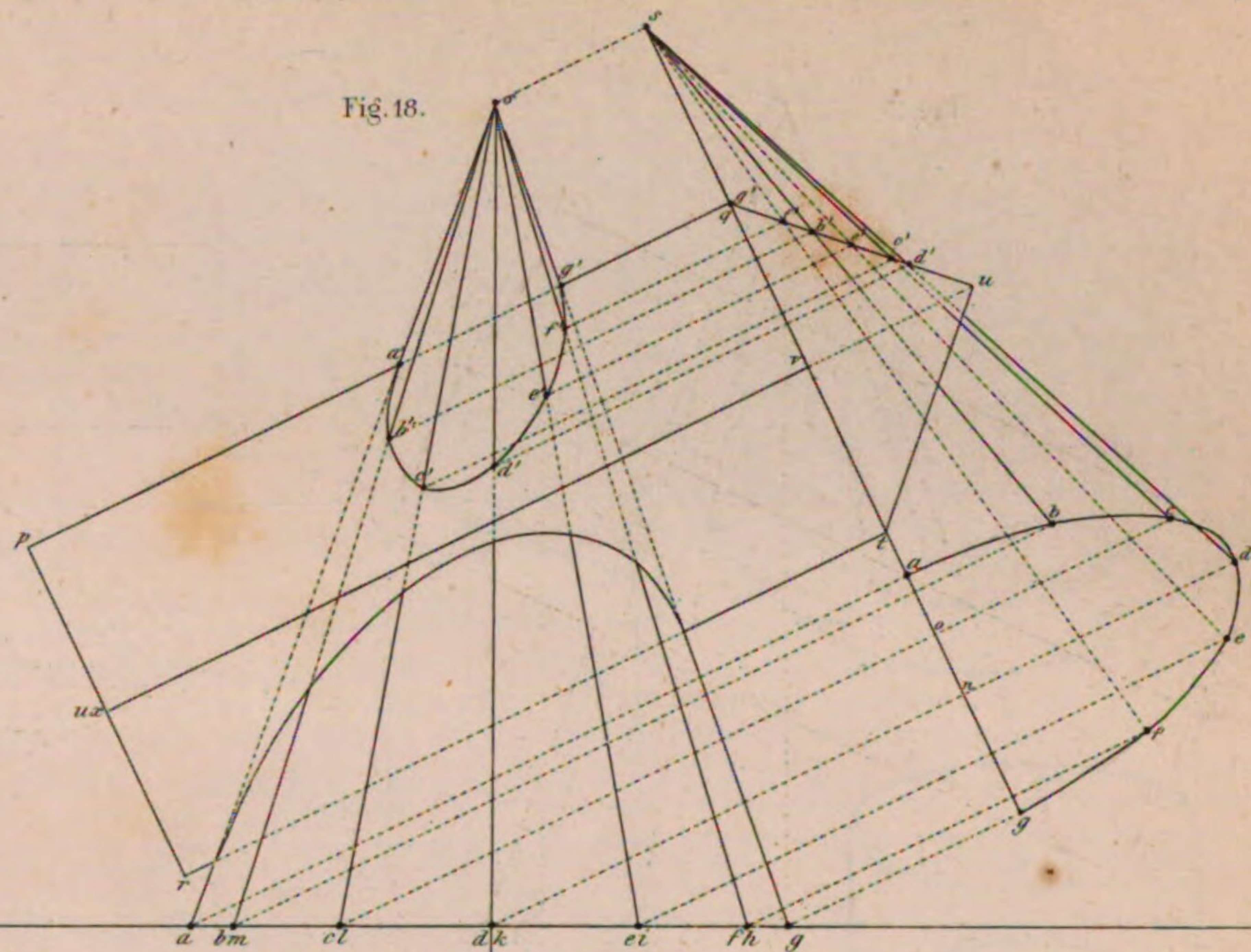


Fig. 18.



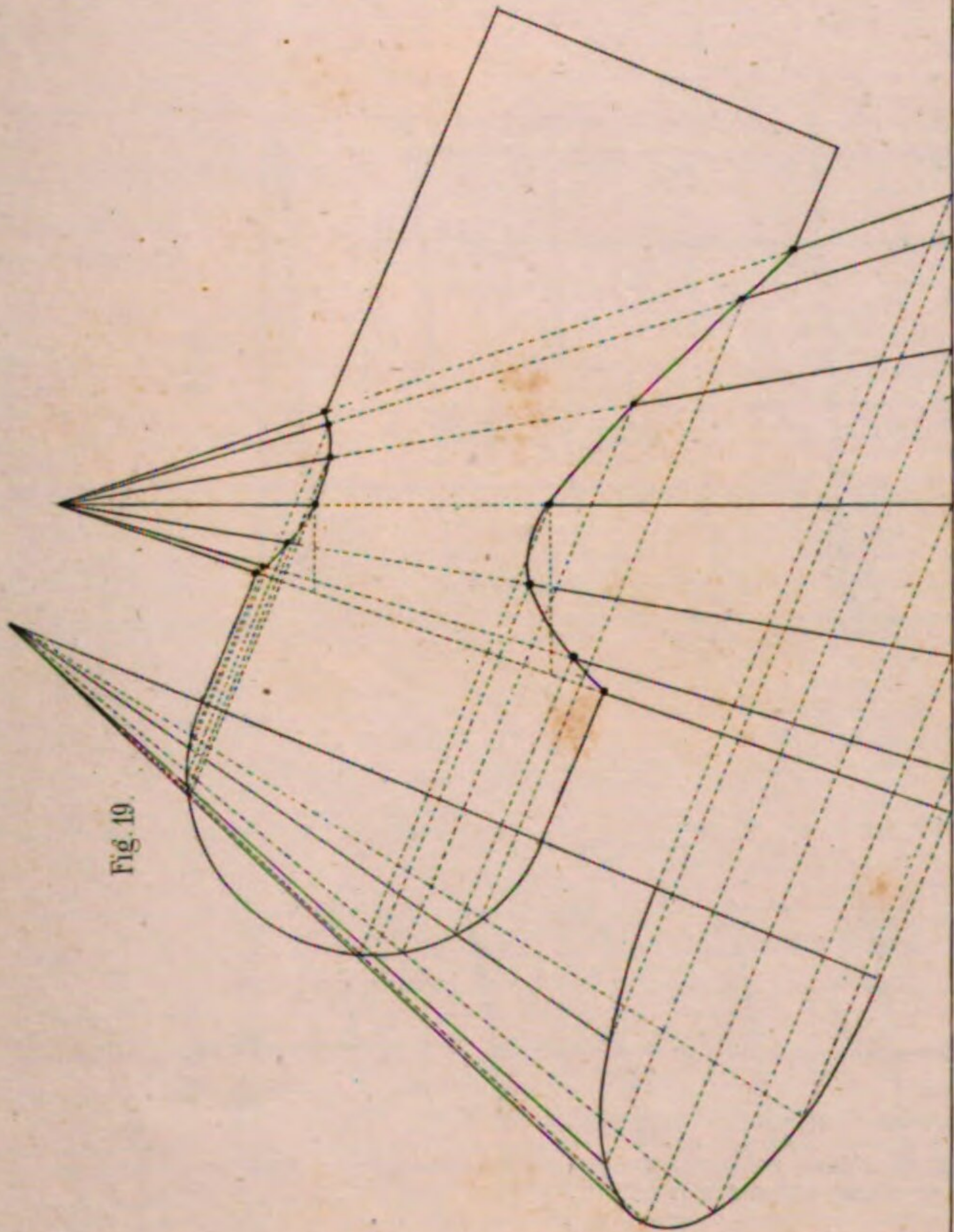


Fig. 19.

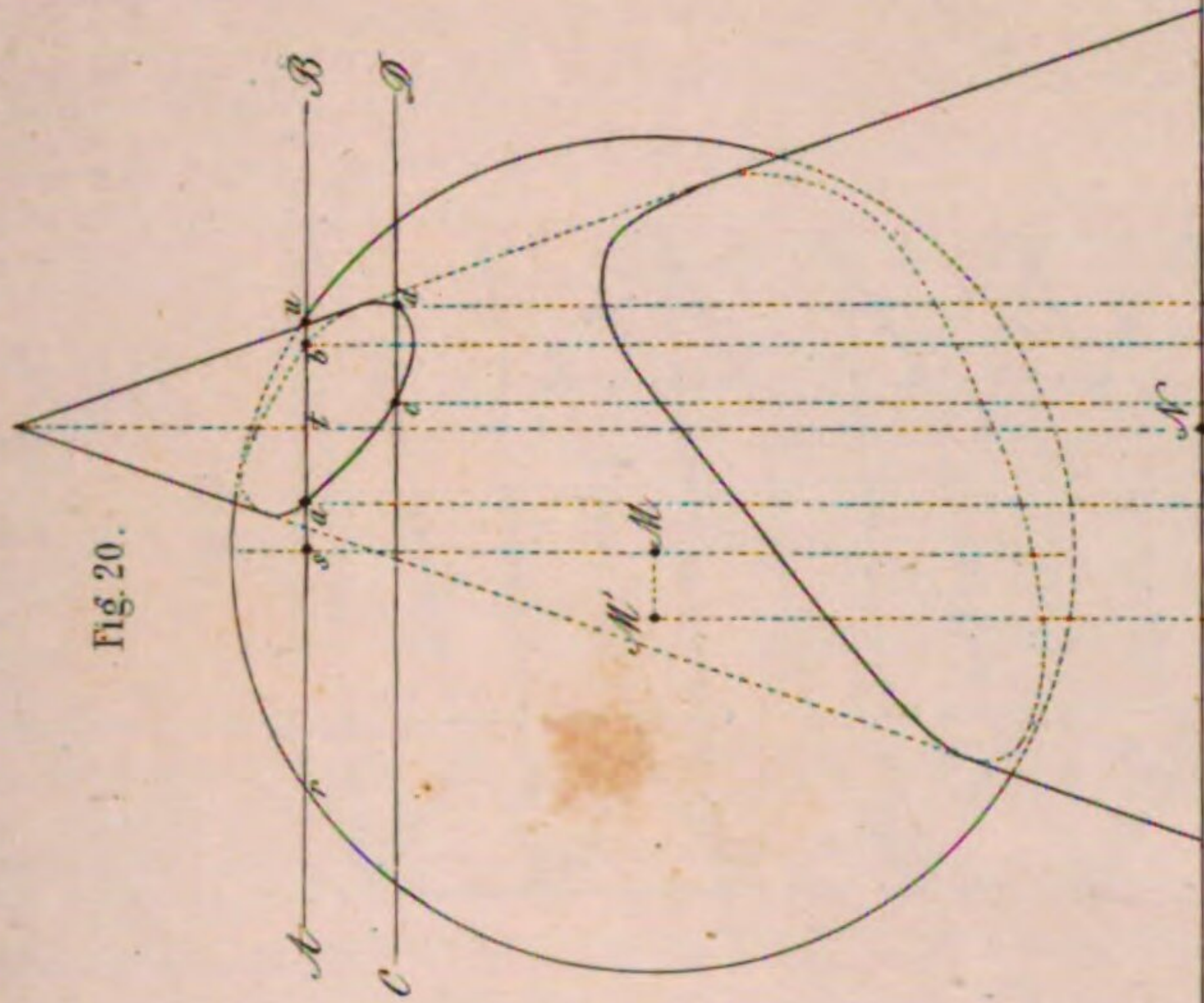
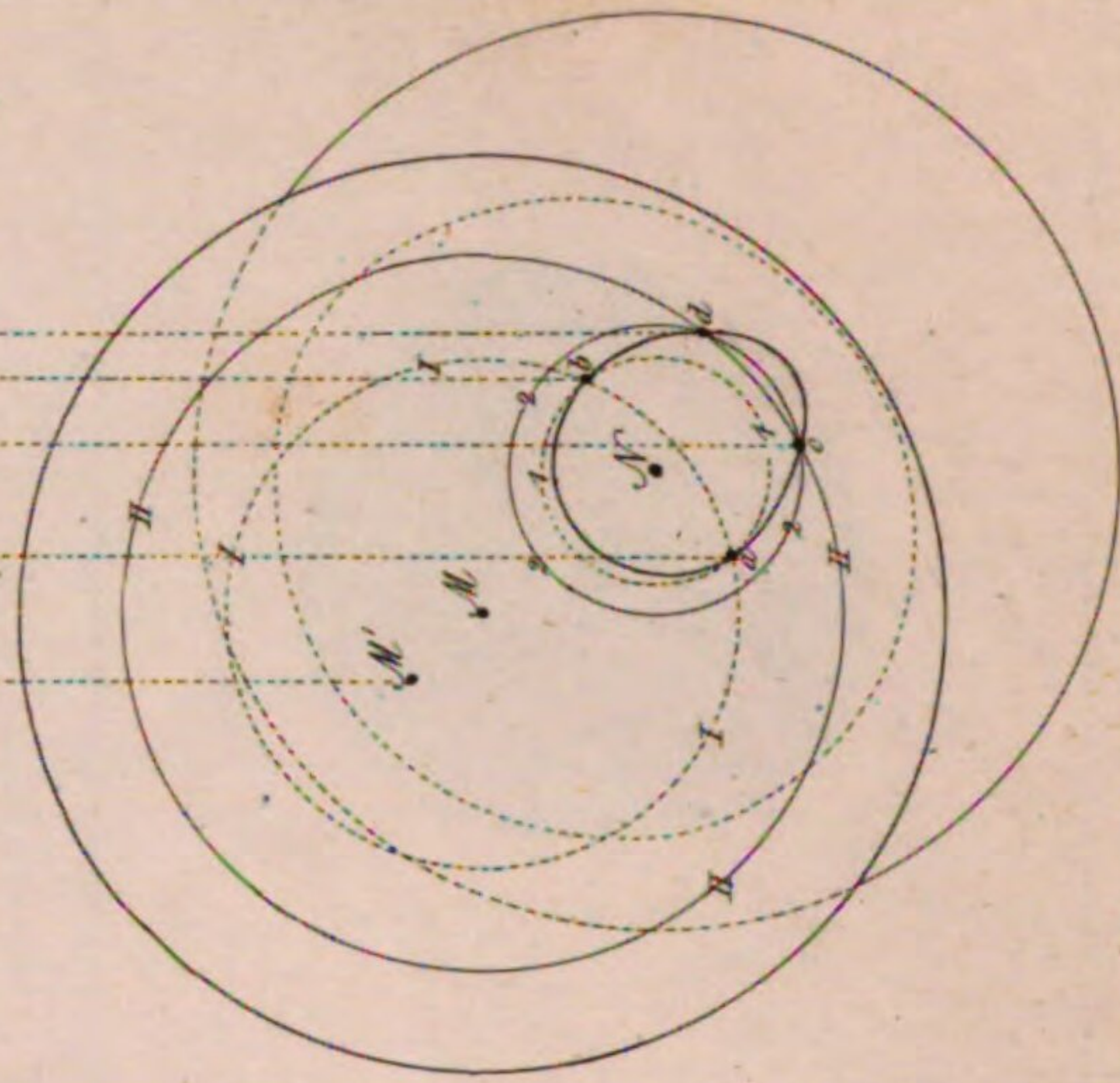
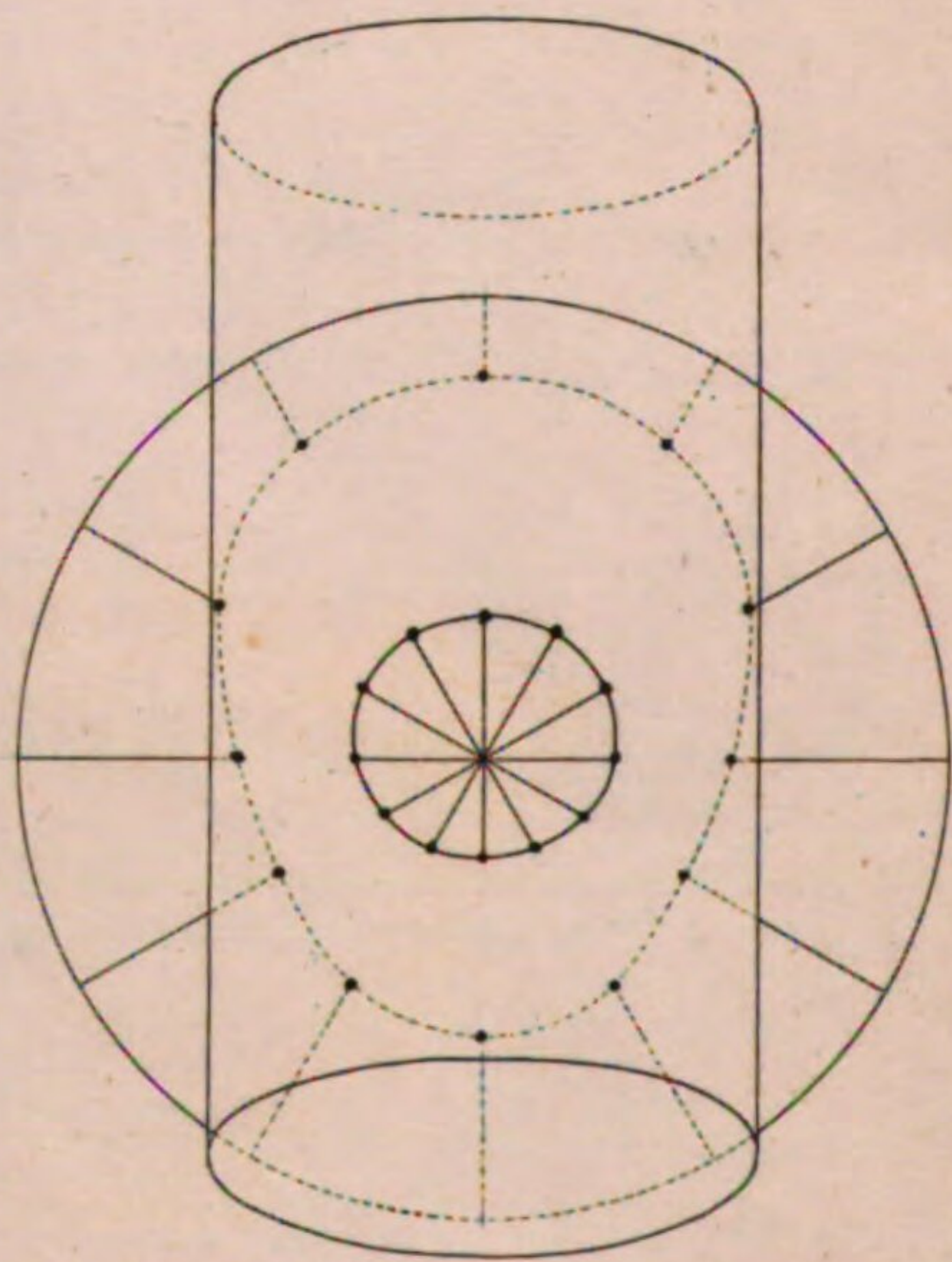


Fig. 20.





Handwritten text, possibly a signature or name, located in the upper right quadrant of the page. The writing is in a cursive or script style and is quite faint.

Handwritten text, possibly a signature or name, located in the middle left quadrant of the page. The writing is in a cursive or script style and is quite faint.

Handwritten text, possibly a signature or name, located in the middle right quadrant of the page. The writing is in a cursive or script style and is quite faint.

Handwritten text, possibly a signature or name, located in the lower left quadrant of the page. The writing is in a cursive or script style and is quite faint.

Handwritten text, possibly a signature or name, located in the lower right quadrant of the page. The writing is in a cursive or script style and is quite faint.

Fig. 21.

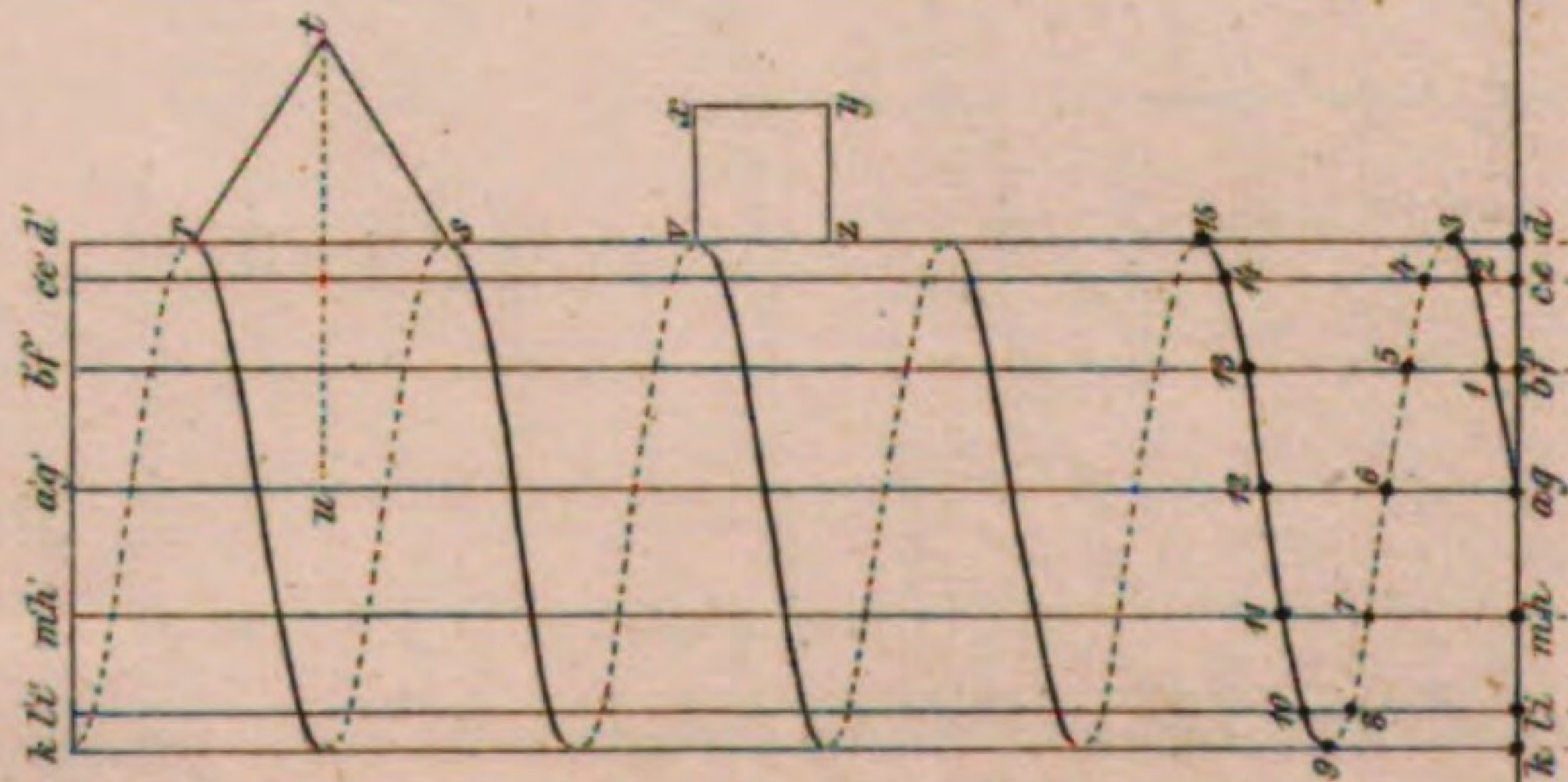


Fig. 22.

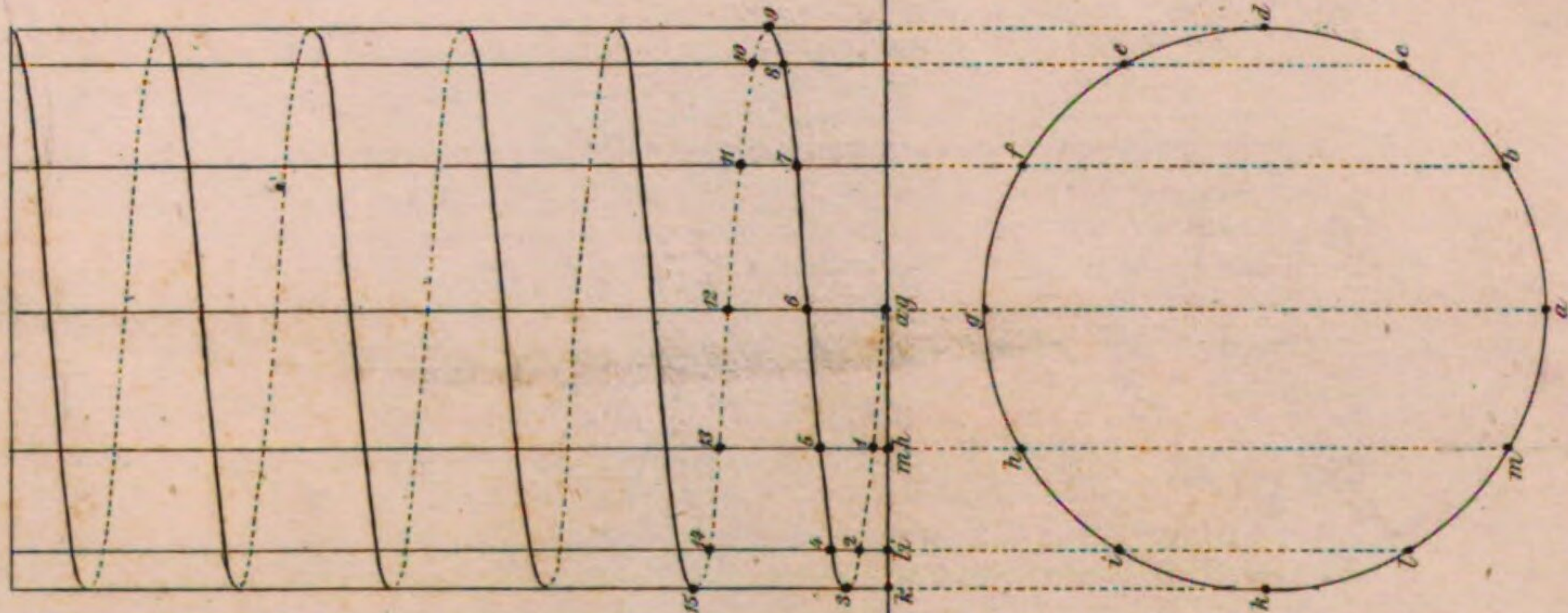


Fig. 23.

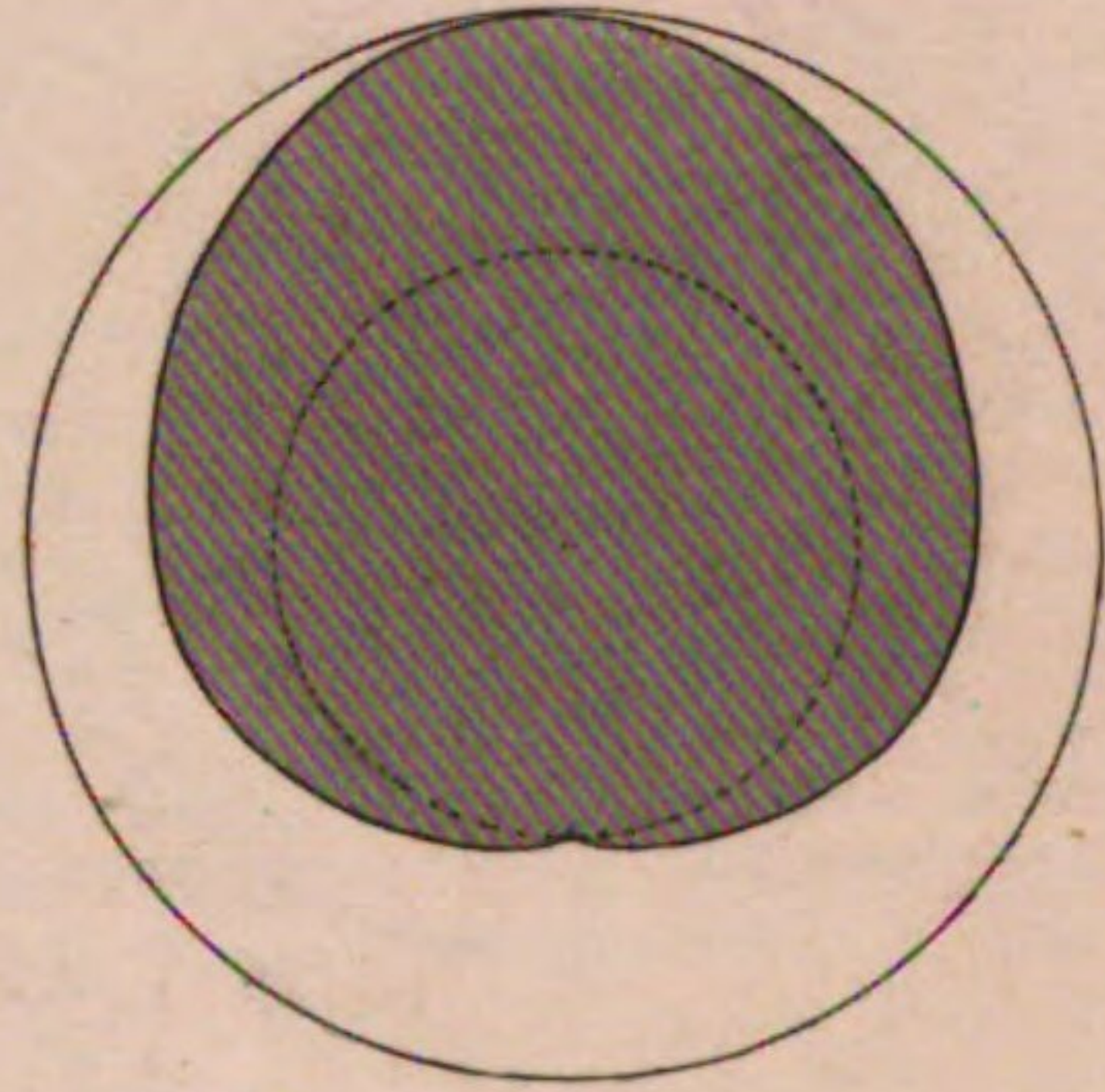
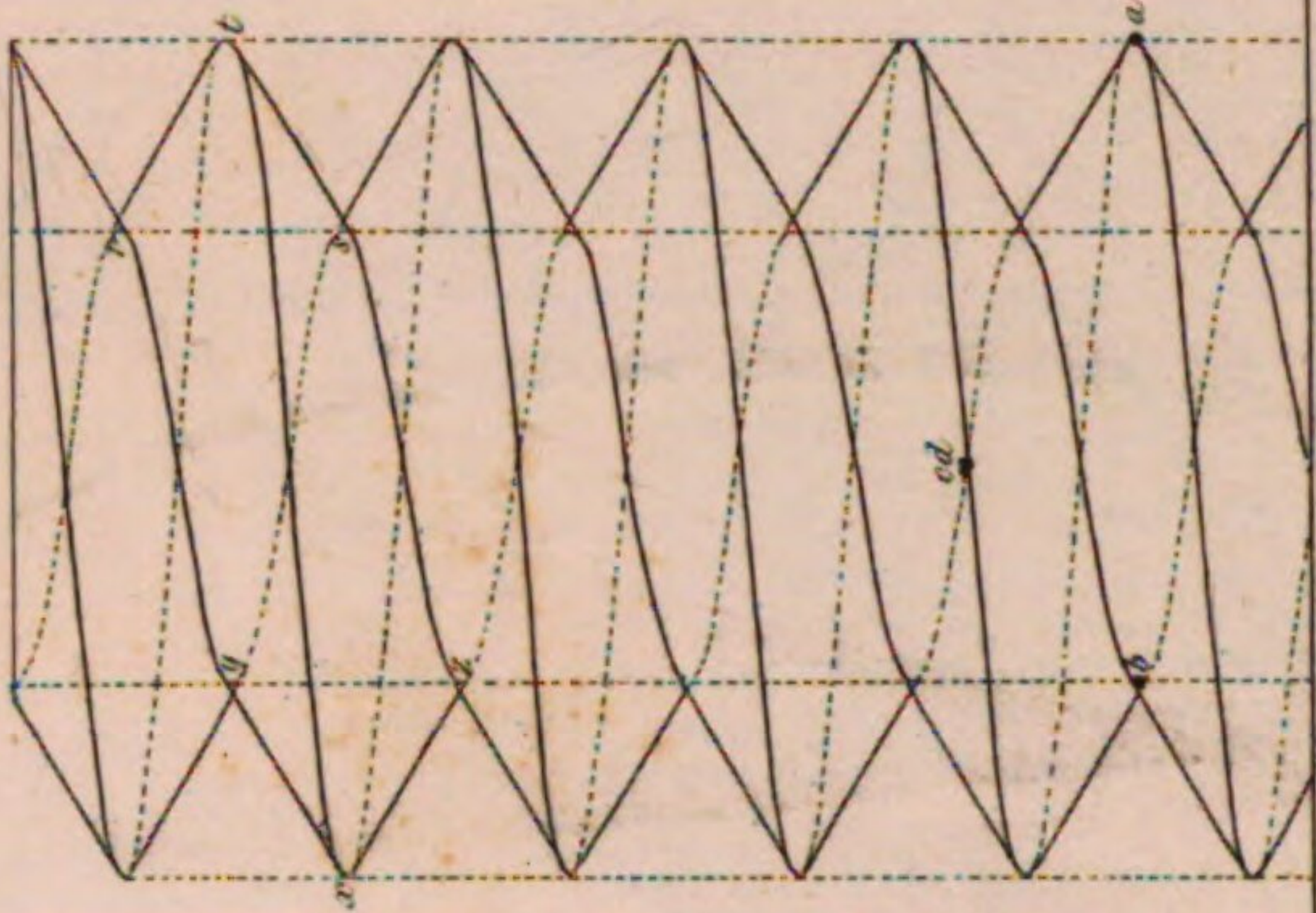


Fig. 24.

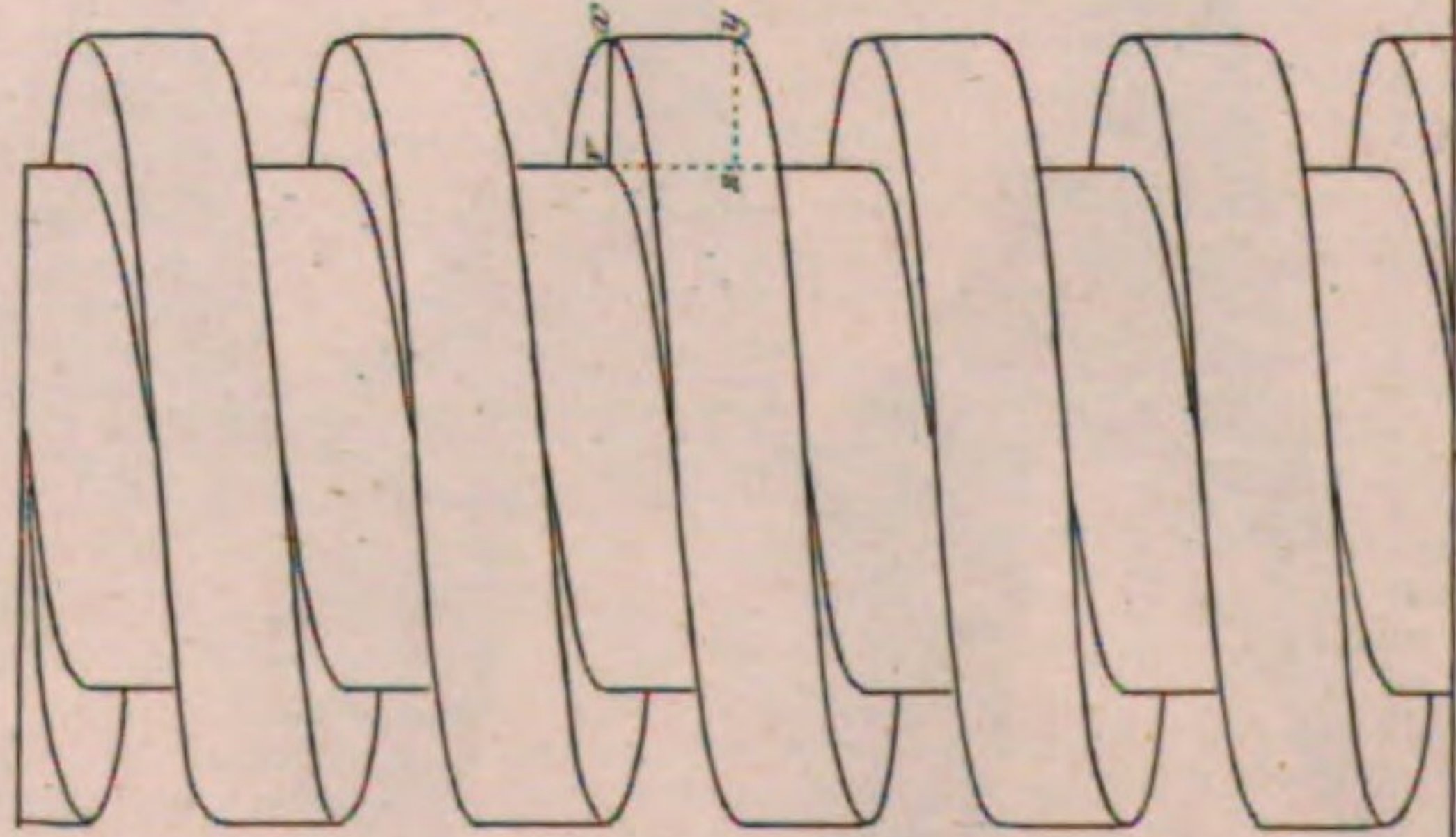


Fig. 25.

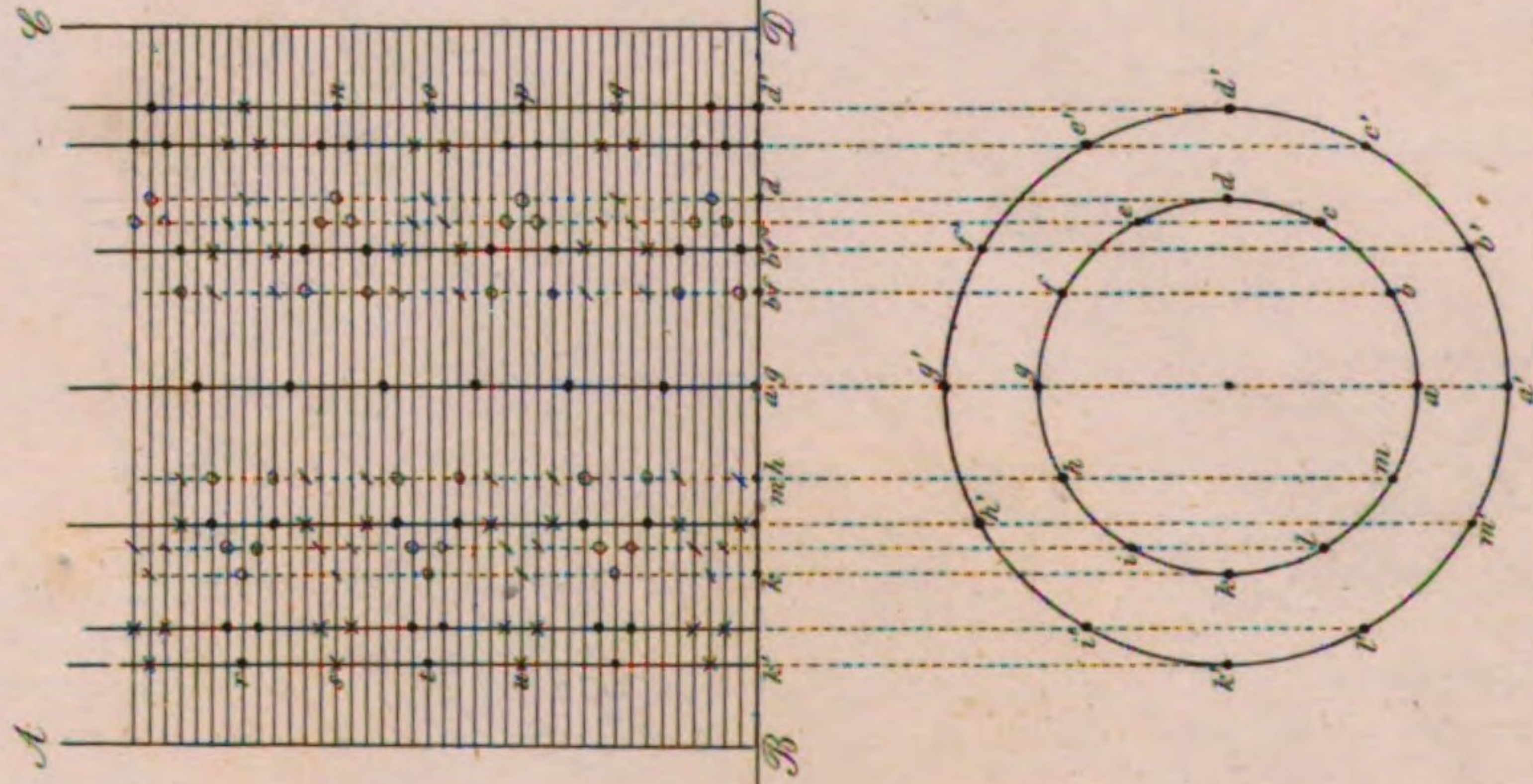
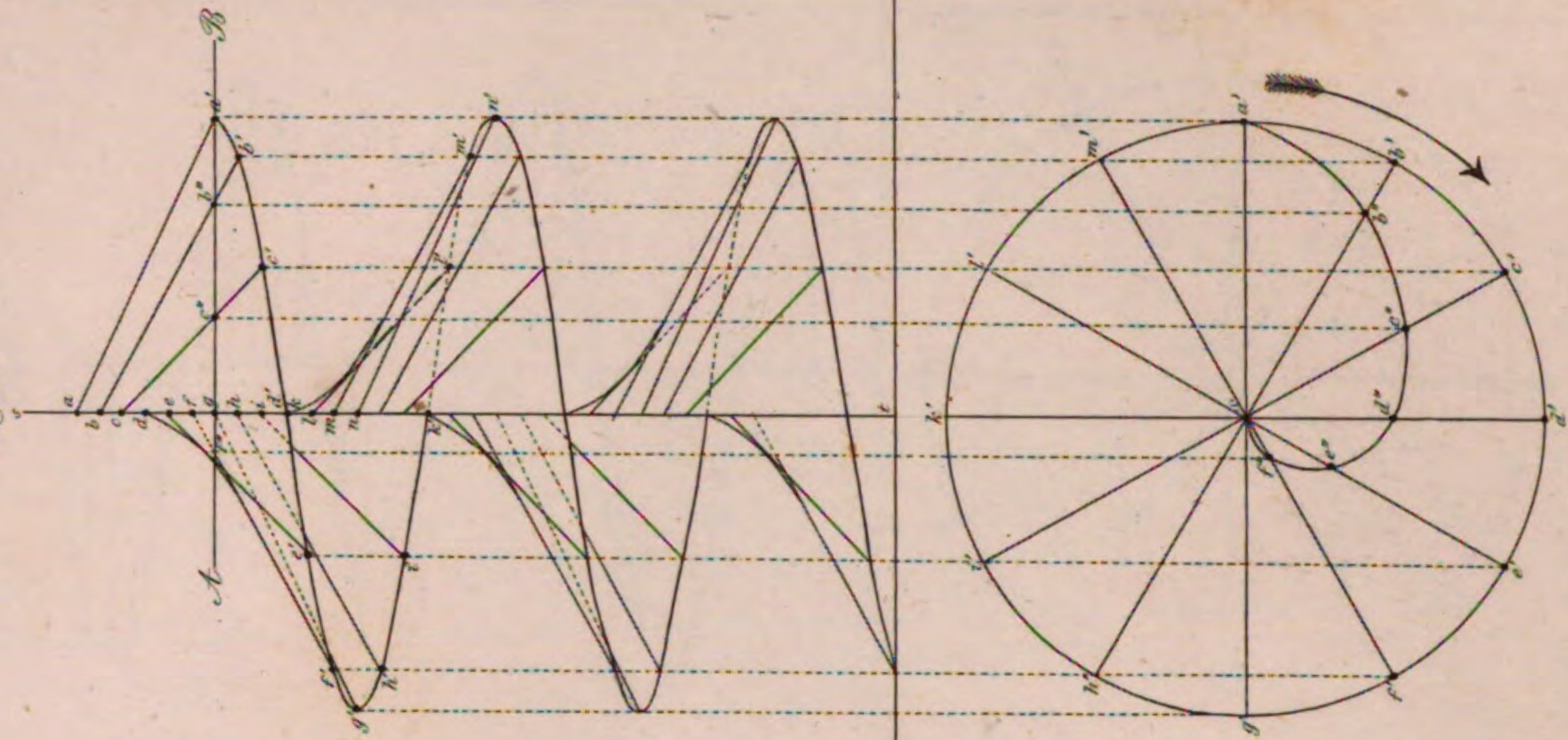


Fig. 26.



Müller, Johann Heinrich Jacob,

Die constructive Zeichnungs-Lehre oder die Lehre vom Grund- und Aufriss,
der Parallelperspective, der malerischen Perspective und der Schatten-
Construction für technische Lehranstalten und für den Selbstunterricht
Bd.: 1

Braunschweig 1874

4 Math.a. 204-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11179171-3